

Math. P.

180

t/i

Graefe

Math. P.

180 $\frac{t}{-1}$

AUFGABEN UND LEHRSÄTZE
AUS DER
ANALYTISCHEN GEOMETRIE
DES PUNKTES,
DER GERADEN LINIE, DES KREISES
UND
DER KEGELSCHNITTE.

FÜR STUDIERENDE AN UNIVERSITÄTEN
UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

BEARBEITET
VON
DR. FR. GRAEFE,
PROFESSOR.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1885.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Fort, O., und O. Schlömilch, Professoren an der Königl. polytechnischen Schule in Dresden, Lehrbuch der analytischen Geometrie. Zwei Teile. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. 5. und 4. Auflage. gr. 8. 1883. 1877. geh. n. *M.* 9.—

Einzeln:

I. Teil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. 5. Aufl. von R. Heger. 1883. (VIII u. 260 S.) n. *M.* 4.—

II. „ Analytische Geometrie des Raumes von O. Schlömilch. 4. Aufl. 1877. (VIII u. 286 S.) n. *M.* 5.—

Das vorliegende Lehrbuch der analytischen Geometrie ist vorzugsweise für den Unterricht an technischen und anderen höheren Schulen bestimmt. Der ungeteilte Beifall, den dasselbe gefunden, hat bereits eine fünfte Auflage nötig gemacht. Wo die fernere Einführung beabsichtigt wird, stellt die Verlagshandlung dem betreffenden Lehrer gern ein Freixemplar behufs vorheriger Prüfung zur Verfügung.

Hesse, Dr. Otto, weil. Professor am königl. Polytechnikum zu München, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger, a. o. Professor an der Universität zu Tübingen. Dritte Auflage. (XVI u. 546 S.) gr. 8. 1876. geh. n. *M.* 13.—

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Koordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Funktionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disziplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedlerschen Übertragung des Salmon'schen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Litteratur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Dafs der Verfasser desselben vor allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Teile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelles Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft mufs Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte. — [Folgt Inhaltsangabe.] — Für Leser, welche mit den nötigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorien erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w.“ [O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik.]

—— Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene. Dritte Auflage, revidirt von Dr. S. GUNDELFINGER, Professor am Großherzoglichen Polytechnikum zu Darmstadt. [VIII u. 230 S.] gr. 8. 1881. geh. n. *M.* 5.20.

„Man kann ohne Übertreibung behaupten, dafs es sehr wenige Bücher giebt, die auf dem kleinen Raume von 230 Seiten eine solche Fülle von Material in einer so eleganten und durchaus klaren Darstellung bieten u. s. w.“ [Schlömilch in d. Zeitschr. f. Mathematik u. Physik.]

AUFGABEN UND LEHRSÄTZE
AUS DER
ANALYTISCHEN GEOMETRIE
DES PUNKTES,
DER GERADEN LINIE, DES KREISES
UND
DER KEGELSCHNITTE.

FÜR STUDIERENDE AN UNIVERSITÄTEN
UND TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

BEARBEITET
VON
DR. FR. GRAEFE,
PROFESSOR.



LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1885.



Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Vorwort.

Die vorliegende Aufgabensammlung ist für Studierende an Hochschulen bestimmt. Die meisten Abschnitte beginnen mit den einfachsten Repetitionsfragen und gehen durch Zahlenbeispiele für die beim Vortrage gegebenen Entwicklungen zu schwierigeren Problemen über. Die Aufgaben 742—846, 851—952, 960—1025 können vor den Aufgaben 464—735 durchgenommen werden; der letzte Abschnitt enthält die mannigfaltigsten Aufgaben (1026—1207) über Kegelschnitte.

Die Antworten auf die Repetitionsfragen, die Auflösungen der numerischen Beispiele und Anleitungen zur zweckmässigen Anlage der schwierigeren Übungen gedenke ich baldigst zu veröffentlichen.

Darmstadt, im Mai 1885.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Der Punkt. Aufg. 1—32	1—4
Die gerade Linie. Linienkoordinaten. Aufg. 33—133 . . .	4—16
Bestimmung von geometrischen Örtern mittelst der geraden Linie. Aufg. 134—175	16—21
Harmonische Linien und Punkte. Punkte und Linien der Involution. Dreieckskoordinaten. Aufg. 176—287 . . .	21—36
Über Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen. Aufg. 288—307	36—38
Der Kreis. Aufg. 308—385	38—46
Systeme von Kreisen. Aufg. 386—463	46—55
Die Kegelschnitte. Systeme von Kegelschnitten. Aufg. 464—735	55—81
Die Ellipse. Aufg. 736—846	81—93
Die Hyperbel. Aufg. 847—952.	93—103
Die Parabel. Aufg. 953—1025	103—110
Vermischte Aufgaben. Aufg. 1026—1207	110—136



Der Punkt.

1. Erkläre: a) das System rechtwinkliger Koordinaten; b) das System schiefwinkliger Koordinaten; c) das System der Polarkoordinaten; d) Anfangspunkt oder Ursprung des Systems; e) Koordinaten-Axen; f) die Ordinate x und die Abscisse y ; g) den Radiusvektor ρ ; h) den Winkel ϑ der Polarkoordinaten.

2. Was versteht man unter Grösse und Sinn der Koordinaten?

3. Was bedeutet die Abkürzung: Punkt (a, b) oder Punkt x, y ?

4. Wie liegen die Punkte $(+a, +b)$ und $(-a, -b)$ gegeneinander?

5. Konstruiere auf Papier, das durch gerade Linien in kleine Quadrate geteilt ist, die Punkte:

$$\begin{array}{llll} x = +6, & x = -6, & x = +6, & x = -6, \\ y = +3; & y = +3; & y = -3; & y = -3. \end{array}$$

6. Bestimme die Entfernung zweier Punkte x', y' ; x'', y'' durch ihre Koordinaten unter Voraussetzung: a) rechtwinkliger Axen, b) schiefwinkliger Axen.

7. Berechne die Entfernung der Punkte $x' = 3$, $y' = 9$; $x'' = -4$, $y'' = 16$ unter Voraussetzung: a) rechtwinkliger Axen, b) schiefwinkliger Axen mit dem Axenwinkel: α) 60° ; β) 30° ; γ) 18° .

8. Die Koordinaten der Ecken eines Dreiecks sind $x' = 3$, $y' = 4$; $x'' = 5$, $y'' = -6$; $x''' = -4$, $y''' = -7$; man soll die Länge der Seiten des Dreiecks berechnen unter Voraussetzung: a) rechtwinkliger Axen, b) schiefwinkliger Axen mit dem Axenwinkel: α) 15° ; β) 18° ; γ) 30° ; δ) 45° ; ϵ) 60° .

9. Man soll unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen y so bestimmen, dass die Entfernung des Punktes $(5, y)$ vom Punkte $(2, 3)$ gleich 5 sei.

10. Man soll unter Voraussetzung rechtwinkliger Axen ausdrücken, dass der Punkt $(2, y)$ vom Punkte $(4, -5)$ die Entfernung $\sqrt{68}$ habe.

11. Welcher Punkt (x, y) ist von den Punkten $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(1, 2)$ gleichweit entfernt unter Voraussetzung: a) rechtwinkliger Axen, b) schiefwinkliger Axen mit dem Axenwinkel: $\alpha) 15^\circ$; $\beta) 30^\circ$; $\gamma) 60^\circ$.

12. Man soll die Koordinaten des Punktes ableiten, der die Länge der Verbindungslinie der beiden Punkte (x', y') , (x'', y'') in einem gegebenen Verhältnis $m : n$ teilt.

13. Wo liegt in Aufg. 12 der Teilpunkt, wenn m und n gleiche Vorzeichen haben?

14. Die Koordinaten des Mittelpunktes der geraden Linie zu finden, welche die Punkte (a, b) , (c, d) verbindet.

15. Die Koordinaten der Mittelpunkte ^{des Dreiecks} zu bestimmen, welches die Punkte $(8, 12)$; $(4, -5)$; $(-12, -6)$ zu Ecken hat.

16. Die Linie von dem Punkte $(3, 4)$ nach dem Punkte $(5, -6)$ ist geteilt in a) 3, b) 5, c) 7 gleiche Teile; es sollen die Koordinaten des dem Punkte $(3, 4)$ zunächstliegenden Teilpunktes bestimmt werden.

17. Eine Seite eines Dreiecks ist in dem Verhältnis $a : b$ und die Linie von diesem Teilpunkt nach der gegenüberliegenden Ecke in dem Verhältnis $(a + b) : c$ geteilt; wie bestimmen sich die Koordinaten dieses letzteren Teilpunktes?

18. Wie kann man Aufg. 17 in Worte einkleiden, wenn $a = b = c$ ist?

19. Wieviel *Koordinaten-Transformationen* unterscheidet man?

20. Wie lauten die *Transformationsformeln*?

21. Wie findet man aus den Koordinaten x, y eines Punktes seine Polarkoordinaten r, ϑ und umgekehrt?

22. Wie misst und zählt man die Winkel, welche eine gerade Linie mit den Koordinatenachsen einschliesst?

23. Die Koordinaten eines Punktes genügen der Gleichung:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0;$$

in welche Gleichung verwandelt sich diese, wenn die neuen Axen den Punkt x', y' in Bezug auf die alten Axen zum Anfangspunkt haben und die neuen Axen X, Y den Axen x, y parallel sind?

24. Wie heisst in Aufg. 23 die neue Gleichung, wenn ist:

$$a_{11} = a_{22} = 1, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = -3, \quad a_{23} = -2, \quad a_{33} = -18, \\ x' = 3, \quad y' = 2?$$

25. Der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ genügen die Koordinaten eines auf rechtwinklige Axen bezogenen Punktes; in welche neue Gleichung geht diese über, wenn die Axen des neuen rechtwinkligen Axensystems mit den alten Axen denselben Anfangspunkt haben und mit den alten Axen den Winkel ϑ bilden?

26. Die Koordinaten eines auf rechtwinklige Axen bezogenen Punktes gehen die Gleichung $xy = 5$ ein; in welche andere Gleichung verwandelt diese sich, wenn die Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den gegebenen Axen das neue Axensystem bilden?

27. Die Koordinaten eines auf rechtwinklige Axen bezogenen Punktes gehen die Gleichung $y^2 - x^2 = 10$ ein; in welche andere Gleichung verwandelt diese sich, wenn die Halbierungsgeraden der Winkel zwischen den gegebenen Axen das neue Axensystem bilden?

28. Man beweise, wenn O der Koordinatenursprung ist, dass ist:

$$x^2 + y^2 + 2xy \cos xOy = X^2 + Y^2 + 2XY \cos XOY.$$

29. Weshalb wird durch Koordinatentransformation der Grad einer Gleichung zwischen den Koordinaten nicht geändert?

30. Die folgenden Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten sind in solche für Polarkoordinaten umzusetzen:

$$\begin{array}{ll} x^2 + y^2 = a^2, & (x^2 + y^2 - a^2)^2 (x^2 + y^2) = a^4 x^2, \\ x^2 + y^2 = mx, & (y^2 + x^2 - ax)^2 = a^2 (x^2 + y^2), \\ x^2 - y^2 = a^2, & (x^2 + y^2 + bx)^2 = a^2 (x^2 + y^2), \\ (x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2), & (x^2 + y^2) (y - b)^2 = a^2 y^2. \\ (y^2 + x^2)^3 = 4a^2 x^2 y^2, & \end{array}$$

31. Die folgenden Gleichungen in Polarkoordinaten sind in solche zwischen rechtwinkligen Koordinaten umzuformen:

$$\varrho = a \cos \vartheta,$$

$$\varrho = a - b \cos \vartheta,$$

$$\varrho = a \sin \vartheta,$$

$$\varrho^2 = a^2 (1 + \cos \vartheta),$$

$$\varrho = a + \frac{b}{\cos \vartheta},$$

$$\varrho = a \sin 2\vartheta,$$

$$\varrho = a (1 + \cos \vartheta).$$

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\vartheta,$$

32. Die Entfernung zweier Punkte soll man durch ihre Polarkoordinaten bestimmen.

Die gerade Linie. Linienkoordinaten.

33. Welche Eigenschaften haben die Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $x = a$ genügen?

34. Durch welche Gleichung* wird die der y -Axe parallelen geraden Linie dargestellt, welche von der y -Axe um a absteht?

35. Welche Eigenschaften haben die Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = b$ genügen?

36. Durch welche Gleichung wird die der x -Axe parallelen geraden Linie dargestellt, welche von der x -Axe um b absteht?

37. Welche Eigenschaften haben die Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = mx$ oder $x = py$ genügen?

38. Durch welche Gleichung wird eine gerade Linie, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, dargestellt?

39. Welche Eigenschaften — *welchen geometrischen Ort* — haben die Punkte, deren Koordinaten der Gleichung $y = mx + b$ genügen? Welche Bedeutung haben m und b ?

40. Durch welche Gleichung wird eine gerade Linie in der Koordinatenebene dargestellt?

41. Wie beweist man, dass die Gleichung $Ax + By + C = 0$ eine gerade Linie repräsentiert? (*Allgemeine Form der Gleichung einer geraden Linie.*)

42. Die Gleichung einer geraden Linie mittelst der Abschnitte auszudrücken, welche sie in den Axen bestimmt.

43. Die Gleichung einer geraden Linie durch die Länge der auf sie vom Anfangspunkt gefällten Senkrechten — Normalen —

* Natürlich immer *zwischen Koordinaten*.

und durch die von dieser mit den Axen gebildeten Winkel auszudrücken unter der Voraussetzung rechtwinkliger Axen.*

44. Welche geometrische Bedeutung haben α und p in der Gleichung der geraden Linie: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$? (*Normalform der Gleichung einer geraden Linie.*)

45. Die gegebene Gleichung einer geraden Linie in der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$ soll auf die Normalform $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ gebracht werden.

46. Die auf schiefwinklige Koordinaten bezogene Gleichung einer geraden Linie in der allgemeinen Form $Ax + By + C = 0$ soll auf die Normalform $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ gebracht werden.

47. Die Gleichung einer geraden Linie zu bestimmen, welche einer gegebenen geraden Linie, — deren Gleichung in der Normalform gegeben sei — parallel ist und von dem Koordinatenanfangspunkt nach entgegengesetzter Richtung denselben Abstand hat.

48. Den senkrechten Abstand P eines durch seine Koordinaten X, Y gegebenen Punktes von einer durch ihre Gleichung in der Normalform gegebenen geraden Linie zu bestimmen.

49. Wenn sind die geraden Linien $y = mx + b$, $y = m'x + b'$ parallel?

50. In welchem Punkte schneiden die in Aufg. 49 gegebenen geraden Linien sich?

51. Unter welcher Bedingung sind die geraden Linien $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$ parallel?

52. In welchem Punkte schneiden sich die in Aufg. 51 gegebenen geraden Linien?

53. Es sei der Winkel zweier geraden Linien zu bestimmen, welche durch ihre Gleichungen a) in rechtwinkligen Koordinaten, b) in schiefwinkligen Koordinaten gegeben sind.

54. Warum kann eine gerade Linie stets so bestimmt werden, dass sie zwei Bedingungen Genüge leistet?

55. Wie heisst die Gleichung einer geraden Linie, die einen gegebenen Punkt (x', y') enthält und zu einer gegebenen Geraden parallel ist?

* Im folgenden sind, wenn nicht anders erwähnt, immer rechtwinklige Axen zu Grunde gelegt.

56. Wie heisst die Gleichung einer geraden Linie, die durch zwei gegebene Punkte (x', y') und (x'', y'') geht?

57. Unter welcher Bedingung liegen drei Punkte in einer geraden Linie?

58. Wie heisst die Gleichung einer geraden Linie, welche durch einen gegebenen Punkt geht und auf einer gegebenen Geraden $Ax + By + C = 0$ senkrecht steht? Wie gross ist die Länge der Senkrechten?

59. Die Gleichung der Halbierungslinie des Winkels zu bestimmen, welchen die Geraden

$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1 = 0$, $x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2 = 0$ bilden.

60. Dieselbe Aufgabe wie in 59, wenn die Geraden in der allgemeinen Form $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ gegeben sind.

61. Unter welcher Bedingung schneiden sich drei gerade Linien $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ in einem Punkte?

62. Wie findet man aus den Gleichungen zweier Geraden die Gleichung einer dritten durch ihren Schnittpunkt gehenden Geraden?

63. In welchem Punkte schneiden sich die Geraden

$$Ax + By + C + k(A'x + B'y + C') = 0,$$

$$Ax + By + C = 0 \text{ resp. } A'x + B'y + C' = 0?$$

64. Warum gehen drei gerade Linien durch denselben Punkt, wenn ihre Gleichungen, jede mit einem konstanten Faktor multipliziert, Null identisch zur Summe geben? Wie heisst die Umkehrung des Satzes?

65. Die Polargleichung einer geraden Linie zu finden.

66. Den Inhalt eines Polygons durch die Koordinaten seiner Ecken zu bestimmen.

67. Den Inhalt des durch die drei geraden Linien $Ax + By + C = 0$, $A'x + B'y + C' = 0$, $A''x + B''y + C'' = 0$ gebildeten Dreiecks zu bestimmen.

68. Es seien folgende gerade Linien in Bezug auf ihre Lage und die von ihnen auf den Axen gebildeten Abschnitte zu untersuchen:

$$x=y, \quad x=6y, \quad y=3x, \quad 5x=3y,$$

$$x+y=17, \quad x+17y=300, \quad 11x-y=104, \quad 7x-3y=-11,$$

$$x-y=5, \quad 3x+5y+7=0, \quad 4x-6y+11=0, \quad (x-4)+(y-3)=0.$$

69. Wie lauten die Gleichungen der Aufg. 68 in der Normalform?

70. Wie heissen die Gleichungen der Seiten eines Dreiecks in der allgemeinen und in der Normalform, wenn die Ecken desselben die Koordinaten haben:

- 1) $(7, 13), (11, 17), (3, 5),$
- 2) $(7, 11), (13, 17), (3, 1),$
- 3) $(1, 2), (-1, 3), (-5, -7),$
- 4) $(3, 4), (-3, 4), (3, -4),$
- 5) $(2, 1), (5, -2), (-3, -1),$
- 6) $(5, 4), (8, 1), (0, 2).$

71. Wie heisst die Gleichung der geraden Linie, welche durch die Punkte (a, b) und $\left(\frac{pa' + qa''}{p + q}, \frac{pb' + qb''}{p + q}\right)$ geht?

72. Wie heisst die Gleichung der geraden Linie Aufg. 71, wenn $p = q$ ist?

73. Wie heissen die Gleichungen der Geraden, welche die betreffenden Ecken der Dreiecke in Aufg. 70 mit den Mittelpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden?

74. Wie bestimmen sich die Koordinaten der Punkte, in welchen sich folgende gerade Linien schneiden:

- | | |
|---|---|
| $1) \begin{cases} x - y = 3, \\ x - 3y = 4, \\ 4x + 2y + 3 = 0; \end{cases}$ | $4) \begin{cases} x + y = 17, \\ 3x + 3y = 51; \end{cases}$ |
| $2) \begin{cases} 7x + 2y = 20, \\ x + 7y = 23, \\ 6x - 5y = -3; \end{cases}$ | $5) \begin{cases} 6x + 7y = 4, \\ 5x - 6y = -2; \end{cases}$ |
| $3) \begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ x + 2y = 5, \\ 2x - y = -5; \end{cases}$ | $6) \begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 5x + 8y = 13, \\ 7x + 11y - 25 = 0; \end{cases}$ |
| | $7) \begin{cases} 17x - 13y = 144, \\ 23x + 19y = 890; \end{cases}$ |

$$8) \begin{cases} x - y = 5, \\ 3\frac{1}{2}x - 4\frac{3}{4}y = 26\frac{1}{2}, \\ 10\frac{1}{2}x - 9\frac{1}{2}y = 60; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 3x - 5y = 5, \\ 4x + 7y = -3, \\ 10x - 3y = 7; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 3x - 5y = 5, \\ 7x + 2y = 2, \\ 4x - 3y = 7; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} x + 13y = 6, \\ 11x + y = 2; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} x + 2y = 23, \\ 3x + 4y = 57, \\ 6x + 5y = 94. \end{cases}$$

Bestimme die Winkel, welche alle diese Linien einschliessen.

75. Es sollen die Koordinaten der Ecken und die Gleichungen der Diagonalen des Vierecks bestimmt werden, dessen Seiten durch die Gleichungen:

$$1) \begin{cases} 2y - 3x = 10, \\ 2y - x = 8, \\ 6x - 3y = 13, \\ 11x + 13y = -27; \end{cases} !$$

$$2) \begin{cases} x - y = 1, \\ 2x + 3y = 5, \\ 4x - 7y = -11, \\ 6x + 11y = 8 \end{cases}$$

gegeben sind. Bestimme die Winkel, welche alle diese geraden Linien einschliessen.

76. Es sollen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten des Vierecks gefunden werden, dessen Seiten durch die Gleichungen:

$$1) \begin{cases} 2y - 3x = 5, \\ x + 2y = 3, \\ 32x - 20y = 33, \\ 24x + 28y = -29; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x + y = 2, \\ x - 3y = 4, \\ 3x + 5y + 7 = 0, \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

gegeben sind. Bestimme die Winkel, welche alle diese Linien einschliessen.

77. Es soll die Gleichung der Verbindungslinie der Durchschnittspunkte in Aufg. 76 aufgestellt werden.

78. Welches sind die Gleichungen der Winkelhalbierungslinien für:

$$1) \begin{cases} 4x + 8y - 9 = 0, \\ 3x + 6y + 1 = 0; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 10x + 5y + 10 = 0, \\ 2x + y + 2 = 0; \end{cases}$$

- | | |
|---|---|
| 3) $\begin{cases} 2x + y + 2 = 0, \\ x + y + 5 = 0; \end{cases}$ | 8) $\begin{cases} x + 5y = 6, \\ 5x + y = 3; \end{cases}$ |
| 4) $\begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{3}x + \frac{1}{2}y - 1 = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ | 9) $\begin{cases} x \cos 18 + y \sin 18 - 5 = 0, \\ x \cos 36 + y \sin 36 - \frac{1}{2} = 0; \end{cases}$ |
| 5) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{3}y + 1 = 0, \\ x + y = 0; \end{cases}$ | 10) $\begin{cases} 8x + 2y - 1 = 0, \\ 4x + y - 1 = 0; \end{cases}$ |
| 6) $\begin{cases} x + 7y + 8 = 0, \\ 2x + 14y + 5 = 0; \end{cases}$ | 11) $\begin{cases} 5x + y + 5 = 0, \\ 2x + y + 1 = 0; \end{cases}$ |
| 7) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ | 12) $\begin{cases} \sqrt{3}x + y - 2 = 0, \\ x - \sqrt{3}y + 2 = 0. \end{cases}$ |

Welchen Winkel schliessen diese Linienpaare ein?

79. Durch Berechnung soll gezeigt werden, dass

- 1) die Halbierungslinien der Winkel eines Dreiecks sich in *einem* Punkte schneiden;
- 2) die Halbierungslinien zweier äusseren und des dritten inneren Winkels eines Dreiecks sich in einem Punkte schneiden;
- 3) die Halbierungslinien der Aussenwinkel eines Dreiecks die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen;
- *4) die Halbierungslinien zweier inneren Winkel und des dritten Aussenwinkels eines Dreiecks die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks in drei Punkten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen;
- 5) die Verbindungslinien der Mitten der Seiten eines Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken sich in *einem* Punkte schneiden;
- 6) die Senkrechten in den Mittelpunkten der Seiten eines Dreiecks sich in *einem* Punkte schneiden;
- 7) die drei Perpendikel, welche von den Ecken eines Dreiecks auf die gegenüberliegenden Seiten gefällt sind, sich in *einem* Punkte schneiden, wenn das Dreieck bestimmt ist 1. durch die Koordinaten der Eckpunkte, 2. durch die Gleichungen seiner Seiten.

Durch passende Wahl der Axen kann man sehr einfache Formeln erhalten

80. In Aufg. 79 seien die Koordinaten der Dreiecksecken:

1) $(0, y'), (x', 0), (-x', 0);$

welche Linien des Dreiecks sind Koordinatenachsen?

2) $(0, y'), (x'', 0), (x''', 0);$

welche Linien des Dreiecks sind Koordinatenachsen?

3) $\left(-1, \frac{7}{2}\right), \left(3, \frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right);$

4) $\left(\frac{1}{7}, \frac{17}{7}\right), \left(-\frac{1}{11}, \frac{25}{11}\right), \left(-\frac{1}{5}, \frac{13}{5}\right);$

5) $(2, 1), (3, -2), (-4, -1);$

6) $(2, 3), (4, -5), (-3, -6).$

81. In Aufg. 78 seien die Gleichungen der Seiten des Dreiecks:

1) $\begin{cases} 2y - 3x = 10, \\ 2y + x = 6, \\ 16x - 10y = 33; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x - 3y = 4, \\ 3x + 5y = -7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6y - x = 6, \\ 8x + 2y + 1 = 0, \\ 12x + 14y + 29 = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 2y - 2 = 0, \\ x + 2y = 5, \\ 2x - 3y = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 7y + 11 = 0, \\ 3y - x = 1, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x + 3y = 13, \\ 3x - y = 7, \\ x - 4y = -10. \end{cases}$

82. Wie gross ist die Länge der Senkrechten vom Punkt $(1, 2)$ auf die gerade Linie $7x + y + 10 = 0$?

83. Wie gross ist die Länge der Senkrechten vom Ursprung auf die Linie $x + 9y - 10 = 0$?

84. Wie gross sind die Senkrechten von den Dreiecksecken $(1, 3), (2, 4), (-5, 6)$ auf die gegenüberliegenden Seiten?

85. Wie gross sind die Längen der Senkrechten von den Dreiecksecken auf die gegenüberliegenden Seiten, wenn die Gleichungen der Seiten des Dreiecks sind:

$$1) \begin{cases} 3x + 4y - 9 = 0, \\ 12x + 5y - 3 = 0, \\ 6x - 7y - 12 = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ 2x + 3y + 3 = 0, \\ 3x + 5y + 5 = 0. \end{cases}$$

86. Wie gross ist die Länge der vom Ursprung auf die gerade Linie $4(x - 4) + 3(y - 3) = 0$ gefällten Senkrechten?

87. Wie gross ist die Länge der vom Punkte $(4, 3)$ auf die gerade Linie $4(x - 4) + 3(y - 3) = 0$ gefällten Senkrechten?

88. Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn dessen Ecken wie in den Aufgaben 70, 80 gegeben sind.

89. Den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, wenn dessen Seiten wie in den Aufgaben 74, 81, 85 gegeben sind.

✓ 90. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch den Punkt (x', y') und den Schnittpunkt S der beiden geraden Linien $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ geht. Durch den Punkt x', y' lege man eine gerade Linie, welche die gerade Linie $ax + by + c = 0$ in P trifft und mit dieser Linie den Winkel α bildet; wie gross ist der Inhalt des Dreiecks $S(x', y')P$?

91. Die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche durch den Punkt (x', y') geht und der geraden Linie $ax + by + c = 0$ parallel ist.

92. In den Aufgaben 90 und 91 setze man:

$$(x', y') = (0, 0), (0, 7), (5, 0), (3, 5), (11, 1), (1, 2), (3, 7), (-5, -7);$$

$$a = 1, 3, 5, 7, -7, -5, -3, -1;$$

$$b = 5, 7, 9, 11, -2, -4, -8, -9;$$

$$c = 6, -8, 5, 4, 3, 10, -11, -13;$$

$$a' = 2, 6, 5, 14, -7, 9, -13, -11;$$

$$b' = 7, 5, 11, -2, 9, -4, 8, -13;$$

$$c' = 5, -8, 6, 10, -9, 7, 0, 4;$$

$$\alpha = 90^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 18^\circ, 15^\circ, 20^\circ, 60^\circ, 22\frac{1}{2}^\circ.$$

93. Die Sätze in Aufg 79 mit Hilfe der Aufg. 64 zu beweisen.

✓ 94. Die Koordinaten des Punktes zu finden, in welchem die Verbindungsline der Punkte (a, b) , (a', b') von der Linie $Ax + By + C = 0$ getroffen wird.

95. Das Verhältniß zu bestimmen, nach welchem die Verbindungslinie der Punkte (x', y') , (a', b') durch die Verbindungslinie der Punkte (a'', b'') , (a''', b''') geschnitten wird.

96. In Aufg. 95 setze man für (x', y') , (a', b') , (a'', b'') , (a''', b''') die Werte aus Aufg. 92.

97. Die Gleichung $\varrho \cos \vartheta = p$ in eine solche zwischen rechtwinklige Koordinaten umzuformen.

98. Die Polarkoordinaten des Schnittpunktes der geraden Linie $\varrho \cos \vartheta = p$, $\varrho \cos \vartheta_1 = p_1$ und den von ihnen eingeschlossenen Winkel zu bestimmen.

99. In Aufg. 98 setze:

$$1) \quad p = 2, \quad p_1 = 1; \quad \vartheta = \vartheta - \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta_1 = \vartheta - \frac{\pi}{6};$$

$$2) \quad p = 3, \quad p_1 = 5; \quad \vartheta = \vartheta - \alpha, \quad \vartheta_1 = \vartheta - \beta;$$

$$3) \quad p = 4, \quad p_1 = 2, \quad \vartheta = \vartheta - \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta_1 = \vartheta - \frac{\pi}{24}.$$

100. Wie heisst die Polargleichung der geraden Linie, welche die Punkte (ϱ', ϑ') , (ϱ'', ϑ'') verbindet?

$$1) \quad \varrho' = 1, \quad \varrho'' = 2, \quad \vartheta' = 0, \quad \vartheta'' = \frac{\pi}{2};$$

$$2) \quad \varrho' = \varrho'' = 1, \quad \vartheta' = \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta'' = \frac{\pi}{2}.$$

101. In welchen Punkten schneiden sich die geraden Linien $(a + ka')x + (b + kb')y + c + kc' = 0$, wenn man dem k alle möglichen Werte beilegt?

102. Welche Eigenschaften haben die geraden Linien: $Ax + By + C = 0$, wenn die veränderlichen Koeffizienten A, B, C mit den Konstanten a, b, c durch die Gleichung $aA + bB + cC = 0$ verbunden sind?

103. Erkläre die *Koordinaten einer geraden Linie* oder die *Linienkoordinaten* u, v zum Unterschiede von den, einen Punkt bestimmenden, *Punktkoordinaten* x, y . (Hesse, Analyt. Geometrie der geraden Linie etc.)

104. Wenn u, v Linienkoordinaten sind, so soll gezeigt werden, welches geometrische Bild den Gleichungen $u = a$, $v = b$ entspricht.

105. Welche Eigenschaften haben die Linien, deren Koordinaten der Gleichung $u = a$ genügen?

106. Durch welche Gleichung in Linienkoordinaten wird ein Punkt der x -Axe dargestellt?

107. Welche Eigenschaften haben die Linien, deren Koordinaten der Gleichung $v = b$ genügen?

108. Durch welche Gleichung in Linienkoordinaten wird ein Punkt der y -Axe dargestellt?

109. Welche Eigenschaften haben die Linien, deren Koordinaten der Gleichung $Au + Bv + C = 0$ genügen? Wie bestimmen sich A , B , C durch x und y ?

110. Durch welche Gleichung wird ein Punkt durch Linienkoordinaten bestimmt?

111. Wieviel *Punktgleichungen* sind die *Gleichungen einer geraden Linie* in *Linienkoordinaten*?

112. Wieviel *Liniengleichungen* sind die *Gleichungen eines Punktes* in *Punktkoordinaten*?

113. Wenn die Koordinaten u' , v' einer geraden Linie und die Gleichung eines Punktes in der *Normalform* $au + bv + 1 = 0$ oder in der *allgemeinen Form* $Au + Bv + C = 0$ gegeben sind, den senkrechten Abstand des Punktes von der geraden Linie zu bestimmen.

114. Warum liegen drei Punkte auf einer und derselben Geraden, wenn ihre Gleichungen, jede mit einem konstanten Faktor multipliziert, Null identisch zur Summe geben? Wie heisst die Umkehrung des Satzes?

115. Die Gleichung des Punktes zu finden, welcher die Verbindungslinie der Punkte $au + bv + 1 = 0$, $a_1u + b_1v + 1 = 0$ halbiert. Die Länge der Verbindungslinie der Punkte zu bestimmen.

116. Welchen Punkt stellt die Gleichung

$$(au + bv + 1) - (a_1u + b_1v + 1) = 0$$
dar?

117. Es sollen die durch Liniengleichungen

$$u + v = 17, \quad u + 17v = 7, \quad 11v - u = 3, \quad u + 6v = 0$$
gegebenen Punkte durch rechtwinklige Koordinaten bestimmt werden.

118. Wie lauten die Gleichungen der Aufg. 117 in der Normalform?

119. Wie heissen die Gleichungen der Ecken eines Dreiecks in der allgemeinen und in der Normalform, wenn die Seiten desselben die Linienkoordinaten:

- 1) $(1, 3), (4, 5), (6, 1), (1, 3)$ bedeutet, dass $u=1, v=3$ ist
- 2) $(5, 6), (7, 8), (9, 11),$
- 3) $(-5, 6), (-7, 8), (9, -11),$
- 4) $(-3, 2), (5, -1), (-13, -7),$
- 5) $(-5, -4), (-8, -1), (0, -2),$
- 6) $(-2, 1), (-3, 4), (3, -5)$

haben. Diese Linienkoordinaten kann man in Aufg. 70 als Punktkoordinaten nehmen und die Punktkoordinaten in Aufgabe 70 hier als Linienkoordinaten verwenden.

120. Wie heisst die Gleichung des Punktes, in welchem sich die geraden Linien (a, b) und $\left(\frac{pa' + qa''}{p + q}, \frac{pb' + qb''}{p + q}\right)$ schneiden?

121. Wie heisst die Gleichung des Punktes Aufg. 120, wenn $p = q$ ist?

122. Wie lauten die Gleichungen der Seitenmittelpunkte der Dreiecke in Aufg. 119?

123. Wie bestimmen sich die Koordinaten der Linien, in welchen folgende Punkte liegen:

- | | |
|---|---|
| $1) \begin{cases} 3u + 2v = 118, \\ u + 5v = 141; \end{cases}$ | $4) \begin{cases} u + v = 30, \\ 8u + 4v = 50, \\ 27u + 9v = 64; \end{cases}$ |
| $2) \begin{cases} 7u + \frac{5}{2}v = 411\frac{1}{2}, \\ 39u - 14v = -935\frac{9}{10}; \end{cases}$ | $5) \begin{cases} 2u + 5v = -1, \\ u - v = 2, \\ u + 4v = -3; \end{cases}$ |
| $3) \begin{cases} 5v - 8\frac{1}{2} = 7u - 44, \\ 2v = u + \frac{5}{7}; \end{cases}$ | |
| $6) \begin{cases} 3u + 5v = 161, \\ 7u + 2v = 204, \\ u + 2v = 84. \end{cases}$ | |

Setzt man in Aufg. 74 statt x, y die Grösse u, v und hier statt u, v die Grösse x, y , so hat man eine Anzahl neuer Aufgaben.

124. Es sollen die Koordinaten der Seiten und die Gleichungen der Diagonalenschnittpunkte des Vierecks bestimmt werden, dessen Ecken durch die Gleichungen:

$$1) \begin{cases} u - 9v = 21, \\ 2u + 7v = 19, \\ 3u + v = 1, \\ 4u - 6v = -11; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u + v = 1, \\ 16u + 8v = 9, \\ 81u + 7v = 36, \\ 5u + 4v = 3 \end{cases}$$

gegeben sind. Durch Vertauschung von u, v und x, y kann man diese Gleichungen in Aufg. 75 und 76 benutzen und die Gleichungen in Aufg. 75, 76 kann man hier verwerten.

125. Es sollen die Verbindungslinien der Gegenpunkte des Vierecks gefunden werden, dessen Ecken durch die Gleichungen:

$$1) \begin{cases} u - v = 5, \\ 2u + 2v = 3, \\ 16u - 10v = -16, \\ u + 7v = 1; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u + v = 3, \\ 2u + 3v = 5, \\ 4u - 5v = 1, \\ 8u + 9v = -1 \end{cases}$$

gegeben sind. Siehe Zusatz zu Aufg. 124.

126. Es sollen die Gleichungen der Schnittpunkte der in Aufg. 125 erwähnten Verbindungslinien aufgestellt werden.

127. Mittelst Linienkoordinaten die Berechnung in Aufgabe 78, 79, 81 auszuführen, wenn das Dreieck bestimmt ist 1. durch die Koordinaten der Seiten, 2. durch die Gleichungen der Ecken.

128. Wie gross ist die Länge der Senkrechten vom Punkte, dessen Gleichung $u + 2v + 1 = 0$ ist auf die gerade Linie $(3, 4)$? Vergl. Aufg. 82.

129. Wie gross ist die Länge der Senkrechten vom Ursprung der Axen x, y auf die gerade Linie $(1, 2)$?

130. Wie gross sind die Senkrechten von den Dreiecksecken $u + 3v + 1 = 0$, $2u + 5v + 1 = 0$, $7u - 3v + 1 = 0$ auf die gegenüberliegenden Seiten? Vergl. Aufg. 85.

131. Wie gross sind die Senkrechten von den Dreiecksecken auf die gegenüberliegenden Seiten, wenn die Koordinaten der Seiten sind: $(3, 4)$, $(7, 8)$, $(11, 13)$? Vergl. Aufg. 86.

132. Die Gleichung des Punktes zu finden, durch welchen die gerade Linie (u', v') und die Verbindungslinie der beiden Punkte $au + bv + c = 0$, $a'u + b'v + c' = 0$ geht. Man nehme für (u', v') , a , b , c , a' , b' , c' die Werte aus Aufg. 92.

133. Die Koordinaten der Linie zu finden, welche durch den Schnittpunkt von den geraden Linien (a, b) , (a', b') geht und den Punkt $Au + Bv + C = 0$ enthält.

Bestimmung von geometrischen Örtern mittelst der geraden Linie.

134. Der geometrische Ort eines Punktes, für welchen die Differenz der Quadrate der Entfernungen von zwei gegebenen Punkten von gegebener Grösse ist, soll bestimmt werden.

135. Wenn von einem Dreieck die Basis und die Summe der Seiten gegeben ist, welches ist der Ort des Punktes in der von seiner Spitze auf die Basis gezogenen Senkrechten, welcher um die Länge der einen Seite von der Basis entfernt ist?

136. Wenn zwei Schenkel eines Winkels OA und OB von einer Transversale von gegebener Richtung AB geschnitten werden, so soll der Ort des Punktes S gefunden werden, welcher AB in dem bekannten Verhältnis $AB = n \cdot AS$ teilt. (*Teilverhältnis von AB durch S ist $AS : SB$.*)

137. Wenn von einem Dreieck der Winkel an der Spitze und die Summe der ihn einschliessenden Seiten gegeben ist, welchen Ort beschreibt der Punkt, der die Basis in einem gegebenen Verhältnis teilt?

138. Von einem Punkte P fälle man die Senkrechten PN , PM auf die Schenkel eines Winkels NOM ; welchen Ort beschreibt P , wenn $OM + ON$ konstant ist?

139. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 138 P , wenn MN einer festen Geraden parallel ist?

140. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 138 P , wenn MN durch die gegebene gerade Linie $y = ax + b$ im gegebenen Verhältnis geteilt wird?

141. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 138 der Mittelpunkt von MN , wenn P die gerade Linie $y = mx + n$ durchläuft?

142. Der Ort der Spitze S eines Dreiecks soll bestimmt werden, von welchem die Grundlinie AB und das Verhältniss $OC:DP$ derjenigen Teile bekannt ist, welche die Seiten in einer festen der Grundlinie Parallelen OP abschneiden.

143. Man bestimme den Ort der Spitze eines Dreiecks, dessen Seiten durch drei in einer geraden Linie liegenden feste Punkte gehen, während die Ecken der Grundlinie sich in zwei festen Geraden bewegen.

144. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 143 die Spitze des Dreiecks, wenn die gerade Linie, welche die festen Punkte enthält, durch den Schnittpunkt der zwei festen Geraden geht? Sind die drei festen Punkte nicht in einer geraden Linie, so erhält man den Satz von Mac-Laurin.

145. Den Ort der Mittelpunkte der Rechtecke zu finden, die in ein gegebenes Dreieck eingeschrieben sind.

146. Wie ist die Lösung der Aufg. 145, wenn statt der Rechtecke Quadrate genommen werden?

147. Auf der Grundlinie eines gegebenen Dreiecks sind zwei feste Punkte gegeben; parallel zur Grundlinie ist eine gerade Linie gezogen und die Punkte, in denen die Parallele die Seiten schneidet, sind mit den festen Punkten in der Basis durch Geraden verbunden; welches ist der Ort des Durchschnittspunktes dieser Geraden?

148. Wie bestimmt sich in Aufg. 147 der Ort, wenn die festen Punkte mit den Basisecken zusammenfallen?

149. Man ziehe in einem Parallelogramm zwei zu den Seiten beliebige Parallelen, deren Schnittpunkte mit den Parallelogrammseiten ein Viereck bilden; welchen Ort beschreiben die Schnittpunkte der Gegenseiten des Vierecks?

150. Durch einen gegebenen Punkt ziehe man zwei beliebige Geraden, welche zwei feste gerade Linien schneiden, und verbinde die Punkte auf den festen geraden Linien kreuzweise, welches ist dann der Ort des Schnittpunktes dieser Verbindungslinien?

151. Drei gerade Linien, welche durch einen und denselben Punkt gehen, werden durch eine dritte beliebige gerade Linie in den Punkten A, B, C geschnitten; welches ist der Ort des Punktes D , wenn das Doppelverhältnis $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ gegeben ist?

Vorbemerkung. Die folgenden Aufgaben über geometrische Örter führen auf Gleichungen, deren Grad den ersten übersteigt; diese Gleichungen sollen nicht diskutiert und interpretiert werden.

152. Den Ort eines Punktes, für welchen das m -fache Quadrat der Entfernung von einem gegebenen Punkte, nebst dem n -fachen Quadrate der Entfernung von einem gegebenen andern Punkte von gegebener Grösse ist, zu bestimmen.

153. Den Ort eines Punktes zu suchen, dessen Abstände von zwei gegebenen Punkten ein gegebenes Verhältniss haben.

154. Von einem Dreiecke ist gegeben: Grundlinie und Winkel an der Spitze. Zu suchen den Ort: a) des Durchschnitts der zu den beiden übrigen Seiten gehörigen Höhenperpendikel, b) des Durchschnitts der Mittellinien eines solchen Dreiecks, c) der Spitze.

155. Von einem Dreieck ist gegeben die Grundlinie und die Differenz der Basiswinkel; welchen Ort beschreibt die Spitze?

156. Welchen Ort beschreibt die Spitze eines Dreiecks, wenn gegeben ist: 1. Grundlinie und das Verhältniss der Basiswinkel, 2. Grundlinie und das Verhältniss $\operatorname{tg} C = p \operatorname{tg} B$?

157. Welchen Ort beschreibt der Punkt, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten eine konstante Summe geben?

158. Welchen Ort beschreibt der Punkt, dessen Entfernungen von zwei festen Punkten eine konstante Differenz haben?

159. Welchen Ort beschreibt der Punkt, welcher von einem gegebenen Punkte und von einer gegebenen Geraden gleiche Abstände hat?

160. Zieht man eine gerade Linie in horizontaler Lage, unterhalb derselben in der senkrechten Entfernung b nimmt

man einen festen Punkt an, zieht alsdann von diesem Punkte aus gerade Linien durch die feste gerade Linie und schneidet auf ihnen oberhalb und unterhalb des Durchschnittspunktes eine konstante Grösse a ab, so erhält man dadurch zwei Punkte P, P' , deren Ort bestimmt werden soll.

161. In einem Dreieck ist der Winkel an der Spitze und die Summe der reziproken Werte der Seiten gegeben; es soll bewiesen werden, dass die Basis durch einen festen Punkt geht.

162. Zwei Seiten eines Dreiecks gehen durch feste Punkte und die Ecken des Dreiecks bewegen sich auf drei durch denselben Punkt gehenden festen geraden Linien; es ist zu zeigen, dass die dritte Seite durch einen festen Punkt geht.

163. Welches Resultat erhält man in Aufg. 162, wenn die Ecken der Dreiecksseiten, die durch zwei feste Punkte gehen, sich in einer beliebigen Geraden bewegen; und wie wird das Resultat, wenn die beliebige Gerade die beiden festen Punkte enthalten soll?

164. Wenn ein gegebenes Dreieck ABC von einer geraden Linie in den Punkten M, N, P geschnitten wird und man von M, N, P Linien zieht, welche ein Dreieck $A'B'C'$ bilden, so dass AB und $A'B'$ sich in M , AC und $A'C'$ in N , BC und $B'C'$ in P schneiden, so soll bewiesen werden, dass die geraden Linien AA', BB', CC' durch einen Punkt R gehen, und der geometrische Ort von R bestimmt werden, wenn $MA'B'$ sich um M dreht.

165. Wenn zwei Dreiecke so gelegen sind (*homolog, kollinear*), dass die Schnittpunkte entsprechender Seiten in einer Geraden liegen (*Axe der Kollineation*), so gehen die geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken der Dreiecke verbinden, durch denselben Punkt (*Centrum der Kollineation*). Wie heisst die Umkehrung des Satzes? (Aufg. 164.)

166. Wie folgt aus Aufg. 165 der Satz: Wenn man in einem *Pascalschen Sechsecke* — d. h. in einem Sechsecke, dessen gegenüberliegende Seiten sich paarweise in drei Punkten schneiden, welche auf einer geraden Linie liegen — die geraden Seiten als die Seiten eines Dreiecks und die gegenüberliegenden ungeraden Seiten als die entsprechenden Seiten eines

zweiten Dreiecks betrachtet, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die entsprechenden Ecken der beiden Dreiecke paarweise verbinden, in einem und demselben Punkte.

167. Wenn man Aufg. 166 analytisch ausgeführt hat und man einfach die Punktkoordinaten mit Linienkoordinaten vertauscht, wie ergibt sich dann der Satz: Wenn man in einem *Brianchonischen* Sechsecke — d. h. in einem Sechsecke, dessen drei Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechsecks paarweise verbinden, sich in einem Punkte schneiden — die geraden Ecken als die Ecken eines Dreiecks und die gegenüberliegenden ungeraden Ecken als die entsprechenden Ecken eines zweiten Dreiecks betrachtet, so schneiden sich die entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke paarweise in drei Punkten, welche auf einer und derselben geraden Linie liegen?

168. Wenn in Aufg. 164 die drei Punkte A, B, C in einer Geraden und die drei Punkte A', B', C' in einer anderen Geraden liegen, so soll bewiesen werden, dass die Schnittpunkte der Geraden $AB', A'B; AC', A'C; BC', B'C$ in einer Geraden liegen.

169. Wenn n -feste gerade Linien und ein fester Punkt O gegeben sind, wenn man durch O einen Radiusvektor zieht, der die festen geraden Linien in den Punkten $P_1, P_2, \dots, P_n$ schneidet, so soll der Ort von P so bestimmt werden, dass ist:

$$\frac{n}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \dots + \frac{1}{OP_n}.$$

170. Zwei feste Punkte A und B sind gegeben; man ziehe die Gerade AP senkrecht auf die Gerade BP und verlängere AP bis Q , so dass $AP \cdot AQ$ einen gegebenen Wert hat; welchen Ort beschreibt Q ?

171. Von einem Dreieck ist die Grundlinie und die Summe resp. Differenz der Seiten gegeben; in einem Endpunkte der Basis A errichtet man auf der anliegenden Seite AC eine Senkrechte AP , man soll den Ort des Punktes P bestimmen, wenn P auf der äusseren resp. inneren Halbierungslinie des Winkels an der Spitze liegt.

172. Welchen Ort beschreibt die Spitze eines Dreiecks, dessen Winkel gegeben sind und dessen eine Ecke der Grund-

linie fest ist, während die andere Ecke sich auf einer geraden Linie bewegt?

173. Zwei Ecken eines gegebenen Dreiecks bewegen sich längs fester gerader Linien; es soll der Ort der dritten Ecke bestimmt werden.

174. Eine gerade Linie von gegebener Länge bewegt sich zwischen den Schenkeln eines gegebenen Winkels; man soll den durch einen auf der beweglichen geraden Linie liegenden festen Punkt zurückgelegten Ort finden.

175. Drei feste gerade Linien werden durch eine dritte gerade Linie von gegebener Richtung in den Punkten A, B, C geschnitten; es soll der Ort des Punktes P der geraden Linie ABC so bestimmt werden, dass das *Doppelverhältnis* $\frac{AC}{CB} : \frac{AP}{PB}$ einen konstanten Wert n hat.

Harmonische Linien und Punkte. Punkte und Linien der Involution. Dreieckskoordinaten.

Im folgenden bedeuten:

$$V_n = 0, \quad A_n = 0$$

die Gleichungen von Linien in Punktkoordinaten oder die Gleichungen von Punkten in Linienkoordinaten, je nachdem ist:

$$V_n \equiv A_n x + B_n y + C_n,$$

$$A_n \equiv x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - \delta_n,$$

oder:

$$V_n \equiv A_n u + B_n v + C,$$

$$A_n \equiv a_n u + b_n v + c.$$

176. Welches geometrische Bild stellt die Gleichung: $A_0 - \lambda A_1 = 0$ dar, wenn λ alle reellen Werte annehmen kann und A_0, A_1 : 1. gerade Linien, 2. Punkte repräsentieren?

177. Was versteht man unter dem *Doppelverhältnis* oder *anharmonischen Verhältnis* eines Linienpaares zu einem andern Linienpaar?

178. Was versteht man unter dem *Doppelverhältnis* oder *anharmonischen Verhältnis* eines Punktepaares zu einem andern Punktepaar?

179. Definiere *harmonische Linienpaare*!

180. Erkläre *harmonische Punktpaare*!

181. Es sind die Gleichungen von vier geraden Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, in der Form:

$$\begin{array}{l} V_0 - \lambda V_1 = 0, \quad V_0 - \lambda_1 V_1 = 0, \\ V_0 - \mu V_1 = 0, \quad V_0 - \mu_1 V_1 = 0, \end{array} \quad \text{oder:} \quad \begin{array}{l} V_0 = 0, \quad V_0 - l V_1 = 0, \\ V_1 = 0, \quad V_0 - m V_1 = 0 \end{array}$$

gegeben, es sei das anharmonische Verhältniß des letzten Linienpaares zu dem ersten zu bestimmen.

182. Es sei das anharmonische Verhältniß folgender Linienpaare zu berechnen:

$$\begin{array}{ll} 1) & \begin{cases} +19x + 2y + 17 = 0, & 3x - 4y + 7 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, & -3x + y - 4 = 0; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} 2x + y + 4 = 0, & x - y + 14 = x, \\ x + y + 9 = y, & x + 2y = 19; \end{cases} \\ 3) & \begin{cases} 3x + 7y = 10, & x + y = 2, \\ 5x + y = 6, & 100x + 8y = 108; \end{cases} \\ 4) & \begin{cases} 5x - y = 26, & \frac{1}{5}x + 11y = 10, \\ x + 7y = -2, & -x + 3y = 8; \end{cases} \\ 5) & \begin{cases} x + 3y = 4, & 3x - 5y = -16, \\ 5x - 6y = -22, & -7x + 9y = 32; \end{cases} \\ 6) & \begin{cases} x - 10y = 1, & x - 2y = 9, \\ 10x - y = 109; & 5x - 6y = 49. \end{cases} \end{array}$$

Kombiniert man in den einzelnen Aufgaben die Gleichungen zu je zwei, so erhält man eine Reihe von neuen Aufgaben.

183. In Aufg. 181 seien nur drei gerade Linien gegeben und das betreffende anharmonische Verhältniß; wie lautet die Gleichung der fehlenden vierten geraden Linie?

184. Die zweite Linie des einen Linienpaares sei zu berechnen aus:

$$\begin{array}{ll} 1) & \begin{cases} 3x + 7y = 13, & -2x + 11y = 7, \\ 7x - 15y = -1, & \text{anharmonisches Verhältniß} = \frac{1}{5} = an V; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} 5x - 9y = -4, & x - 7y = 0, \\ 2x - y - 1 = 0, & \frac{2}{5} = an V; \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3) & \begin{cases} 5x - 3y = 3, & 36x - 15y = 26, \\ 9x - 12y = 1, & an\ V = 1; \end{cases} \\
 4) & \begin{cases} 7x + 9y = 9, & 4x + 3y = 18, \\ x + 2y = -3, & an\ V = \frac{1}{2}; \end{cases} \\
 5) & \begin{cases} 6x + 4y = 9, & 2x - 4y = -5, \\ 2x + 4y = 7, & an\ V = \frac{1}{3}; \end{cases} \\
 6) & \begin{cases} x + 7y = 6, & 25x + 26y = 1, \\ -15x + 10y = 28, & an\ V = -1. \end{cases}
 \end{array}$$

Durch Kombination der Gleichungen erhält man eine Reihe von neuen Aufgaben.

185. Wie heisst das anharmonische Verhältniss folgender Linienpaare:

$$V_0 = 0, \quad V_1 = 0, \quad V_0 - \lambda V_1 = 0, \quad V_0 + \lambda V_1 = 0?$$

186. Wie bestimmt sich das harmonische Verhältniss der Linienpaare der Aufg. 181?

187. Bestimme in Aufg. 182 eine gerade Linie immer so, dass die Verhältnisse der Linienpaare harmonische sind; setze in Aufg. 184 Verhältniss = -1.

188. Löse die Aufg. 181—187 unter der Voraussetzung, dass die Punktkoordinaten zu Linienkoordinaten werden.

189. Beweise den Satz: Wenn vier von demselben Punkte 0 ausgehende gerade Linien von einer geraden Linie in den Punkten A, B, C, D geschnitten werden, so ist das anharmonische Verhältniss der vier Schnittpunkte unabhängig von der Lage der geraden Linie AD und gleich dem anharmonischen Verhältniss des Büschels der vier geraden Linien.

190. Zu drei auf einer geraden Linie gegebenen Punkten einen vierten, harmonisch mit denselben gelegenen Punkt zu finden, der einem der drei Punkte *zugeordnet* ist.

191. Liegt in Aufg. 190 einer der drei gegebenen Punkte in der Mitte zwischen den beiden anderen, so soll der jenem Mittelpunkt zugeordnete vierte harmonische Punkt bestimmt werden.

192. Das Linienpaar zu bestimmen, welches harmonisch ist zu zwei Paar gegebenen geraden Linien, welche durch denselben Punkt gehen.

193. Wieviel Linienpaare giebt es, welche harmonisch sind zu zwei gegebenen Linienpaaren, welche einen und denselben Punkt enthalten?

194. Das Punktpaar zu bestimmen, welches harmonisch ist mit zwei gegebenen Punktpaaren, welche auf einer geraden Linie liegen.

195. Wieviel Punktpaare giebt es, welche harmonisch sind zu zwei auf einer geraden Linie gegebenen Punktpaaren?

196. Drei Paare von Linien, welche denselben Punkt gemein haben, bilden eine *Involution*, wenn ein viertes Paar gerader Linien gefunden werden kann, welches zu jedem der drei Paare gerader Linien harmonisch ist; es soll die Bedingung angegeben werden, unter welcher die drei Linienpaare eine *Involution* bilden, wenn die Gleichungen der drei Paar gerader Linien gegeben sind (s. Aufg. 225).

197. Drei Paare von Punkten auf derselben geraden Linie bilden eine *Involution*, wenn ein viertes Punktpaar bestimmt werden kann, welches mit jedem der drei Punktpaare harmonisch ist; es soll die Bedingung angegeben werden, unter welcher die drei Punktpaare eine *Involution* bilden, wenn die Gleichungen der drei Punktpaare gegeben sind (s. Aufg. 225).

198. Warum ist durch zwei von demselben Punkte ausgehender Linienpaare das Linienpaar nicht bestimmt, welches mit den gegebenen eine *Involution* bildet?

199. Warum ist durch zwei Punktpaare auf einer geraden Linie das Punktpaar nicht bestimmt, welches mit den Paaren eine *Involution* bildet?

200. Wieviel Linienpaare giebt es, welche eine *Involution* bilden mit zwei gegebenen Linienpaaren und mit zwei anderen bekannten Linienpaaren, wenn alle Linien durch einen Punkt gehen?

201. Wieviel Punktpaare giebt es, welche eine *Involution* bilden mit zwei gegebenen Punktpaaren und mit zwei anderen Punktpaaren, wenn alle Punkte auf derselben geraden Linie liegen?

202. Es sei zu beweisen: Wenn man die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen durch eine gerade Linie

schneidet und zu zwei Schnittpunkten derselben auf den Seiten des Dreiecks die vierten harmonischen Punkte konstruiert, so liegen die beiden konstruierten Punkte und der dritte Schnittpunkt auf einer geraden Linie.

203. Wenn man von einem Punkte O nach den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht und in zwei Ecken die vierten harmonischen Linien konstruiert, so schneiden sich dieselben in einem Punkte, durch welche auch die durch den ersten Punkt O und die dritte Ecke des Dreiecks gelegte gerade Linie geht.

Wie kann man durch Punkt- und Linienkoordinaten die Sätze 202 und 203 zugleich beweisen?

204. Es sei zu beweisen: Wenn man von irgend einem Punkte nach den Ecken eines Dreiecks drei gerade Linien zieht und in einer Ecke die vierte harmonische Linie konstruiert, so schneidet letztere die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in einem Punkte; dieser Punkt und die zwei Punkte, in welchen die von dem beliebigen Punkte nach den zwei anderen Ecken des Dreiecks gezogenen geraden Linien die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks schneiden, liegen in einer Geraden.

205. Wenn man von einem beliebigen Punkte nach den Ecken eines Dreiecks drei Gerade zieht und in jeder Ecke die vierte harmonische Linie konstruiert, so gehen die letzteren und die gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks durch drei Punkte, die auf einer und der nämlichen Geraden liegen.

206. Wie folgt aus den letzten Aufgaben der Satz: Wenn man von dem Schnitte zweier Diagonalen eines vollständigen Vierecks gerade Linien nach den Enden der dritten Diagonale zieht, so sind die gezogenen Geraden harmonisch mit den beiden Diagonalen?

207. Wenn von zwei harmonischen Linienpaaren drei gerade Linien gegeben sind, die vierte harmonische Linie mit Hilfe des vollständigen Vierecks linear zu konstruieren.

208. Zieht man von einem beliebigen Punkte nach den Enden der drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks die Linienpaare, so bilden diese eine Involution.

209. Sind von drei von *einem* Punkte ausgehenden Linienpaare der Involution fünf Linien gegeben, so soll die sechste Linie linear bestimmt werden.

210. Es soll bewiesen werden: Wenn man von einem Punkte nach den Endpunkten der drei Diagonalen eines vollständigen Vierecks gerade Linien zieht, so schneiden sich in jedem der sechs Endpunkte der Diagonalen drei Linien; wenn man in jedem dieser Endpunkte zu den dreien die vierte harmonische Linie konstruiert, so schneiden sich die konstruierten Linien paarweise in drei Punkten, welche auf einer und derselben Geraden sich befinden.

211. Aus welcher vorhergehenden Aufgabe folgt dadurch, dass man von Punktkoordinaten zu Linienkoordinaten übergeht, der Satz: Wenn man die Dreiecksseiten durch eine gerade Linie schneidet und auf jeder Seite zu dem Schnittpunkt den vierten harmonischen Punkt bestimmt, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die konstruierten Punkte mit den gegenüberliegenden Dreiecksecken verbinden in *einem* Punkte?

212. Es soll mittelst Linienkoordinaten bewiesen werden: Schneidet man die Seiten eines Dreiecks durch eine gerade Linie, bestimmt zu einem der Schnittpunkte auf der Seite des Dreiecks, auf der er liegt, den vierten harmonischen Punkt, verbindet diesen Punkt durch eine gerade Linie mit der gegenüberliegenden Dreiecksecke, so geht die Verbindungslinie durch den Punkt, in welchem sich die Verbindungslinie der beiden anderen Schnittpunkte und der gegenüberliegenden Dreiecksecken schneiden.

213. Wie folgt aus Aufgabe 206 der Satz: Jede zwei Diagonalen eines vollständigen Vierecks teilen die dritte Diagonale harmonisch?

214. Von zwei harmonischen Punktepaaaren sind drei Punkte gegeben; es soll der vierte harmonische Punkt linear (mit Hilfe des vollständigen Vierecks) bestimmt werden.

215. Jede gerade Linie schneidet die drei Linienpaare, welche irgend vier Punkte paarweise verbinden, in Punktepaaaren der Involution.

216. Sind von drei Punktpaaren der Involution auf einer Geraden fünf Punkte gegeben, so soll der sechste Punkt linear konstruiert werden.

217. Wie folgt der Satz: Die drei geraden Linien, welche die Mittelpunkte der gegenüberliegenden Seite und die Mittelpunkte der beiden Diagonalen eines Vierecks verbinden, schneiden sich in *einem* Punkte, aus dem Satz: Wenn man drei Linienpaare, welche vier Punkte paarweise verbinden, durch eine Gerade schneidet, zu jedem Schnittpunkte den vierten harmonischen Punkt konstruiert auf der von jenen sechs geraden Linien, auf welcher der Schnittpunkt liegt, so schneiden sich die drei geraden Linien, welche die konstruierten Punkte paarweise verbinden, in *einem* Punkte?

218. Was versteht man unter *projektivischen, homographischen, konformen Strahlenbüschel*? *Zugeordnete oder konjugierte Strahlen*? *Scheitel* oder *Träger der Büschel*?

219. Wieviel Linienpaare bestimmen zwei projektivische Strahlenbüschel?

220. Wie bringt man zwei projektivische Strahlenbüschel in *perspektivische Lage*?

221. Was versteht man unter *projektivischen Punktreihen*? *Zugeordnete oder konjugierte Punkte*? *Träger der Punktreihe*? Definiere die *Projektivität* einer Punktreihe mit einem Strahlenbüschel (s. Aufg. 189); *perspektivische Lage* von zwei Punktreihen.

222. Beweise die folgenden Sätze (s. Aufg. 189):

1. Sind zwei Doppelverhältnisse oder anharmonische Verhältnisse aus vier Punkten, bei gleicher Aufeinanderfolge der letzteren, gleich und fallen drei Punkte des einen auf die entsprechenden Punkte des andern, so fallen auch die vierten Punkte derselben aufeinander.
2. Sind zwei Gebilde projektivisch — eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel oder zwei Punktreihen oder zwei Strahlenbüschel —, so ist das Doppelverhältnis aus irgend vier Elementen des einen Gebildes gleich dem Doppelverhältnis der vier entsprechenden Elemente des andern.
3. Zwei projektivische Punktreihen oder Strahlenbüschel fallen vollständig zusammen, wenn sie drei Paare entsprechender Elemente gemein haben.

4. Zwei projektivische Punktreihen oder Strahlenbüschel befinden sich in *perspektivischer Lage*, wenn zwei entsprechende Elemente aufeinander fallen; ferner ist eine Punktreihe mit einem ihr projektivischen Strahlenbüschel in perspektivischer Lage, wenn drei Punkte der Punktreihe auf die entsprechenden Strahlen des Büschels fallen.
5. Ist bei gleicher Aufeinanderfolge der entsprechenden Elemente das Doppelverhältnis aus je vier Elementen eines Gebildes gleich dem Doppelverhältnis aus den entsprechenden Elementen eines andern, so sind beide Gebilde projektivisch.
6. Sind zwei Gebilde einem dritten projektivisch, so sind sie auch unter sich projektivisch.
7. Bei zwei projektivischen Punktreihen ist das Rechteck aus den Abständen irgend eines Paares entsprechender Punkte von den Durchschnittspunkten der Parallelstrahlen — *Gegenpunkten* — unveränderlich.
8. Bei zwei *ähnlichen* Punktreihen, d.h. bei zwei projektivischen Punktreihen, deren unendlich ferne Punkte sich gegenseitig entsprechen, sind die Abstände irgend eines Paares entsprechender Punkte einander proportional.

223. Wenn die Schenkel eines Winkels die Gleichungen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ haben, welchen Satz stellen die Gleichungen

$$A_1 = 0, \quad A_1 - \lambda A_2 = 0$$

$$A_2 = 0, \quad A_1 + \lambda A_2 = 0$$

dar?

224. Wie heisst die Aufg. 223, wenn die Gleichungen Punkte in Linienkoordinaten darstellen?

225. Wiederhole Aufgabe 196 und 197! Wie folgen die Definitionen in den Aufgaben 196 und 197 aus folgenden Erklärungen und Lehrsätzen:

Wenn zwei projektivische Punktreihen denselben Träger haben und ihre Gegenpunkte zusammenfallen, so entsprechen sich die Punkte beider Reihen paarweise doppelt.

Ein Doppelgebilde, bestehend aus zwei $\left\{ \begin{array}{l} \text{projektivischen} \\ \text{konzentrischen} \end{array} \right.$ Punktreihen, welche denselben Träger haben und deren Punkte } und projektivischen Strahlenbüscheln, deren Strahlen }

sich paarweise doppelt entsprechen, wird eine Involution von
 $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punktpaaren} \\ \text{Strahlenpaaren} \end{array} \right\}$ genannt.

Erkläre: den *Mittelpunkt* einer Involution von Punktpaaren, *ungleichlaufende* oder *hyperbolische* und *gleichlaufende* oder *elliptische* Involutionen von Punktpaaren resp. Strahlenpaaren. Welche Involutionen haben sich selbstentsprechende Punkte resp. Strahlen? *Doppelpunkte* und *Doppelstrahlen*?

Wenn zwei projektivische Punktreihen denselben Träger haben und irgend zwei Punkte derselben sich doppelt entsprechen, so bilden sie eine Involution von Punktpaaren.

Eine Involution von Punktpaaren wird bestimmt: 1. durch den Mittelpunkt und zwei entsprechende Punkte; 2. durch zwei Paare entsprechender Punkte.

Eine Involution von Strahlenpaaren bestimmt auf jeder Transversalen eine Involution von Punktpaaren (s. Aufg. 189).

Bei einer elliptischen Involution giebt es immer zwei Punkte, von welchen alle Paare entsprechender Punkte unter rechten Winkeln erscheinen.

In einer hyperbolischen Involution sind je zwei entsprechende Elemente durch die beiden Doppelemente harmonisch getrennt.

Eine Involution von Strahlenpaaren hat entweder nur ein Paar rechtwinkliger entsprechender Strahlen oder lauter solche Paare.

226. Irgend drei Grössen x, y, z , deren Verhältnisse $\frac{x}{z}, \frac{y}{z}$ die bekannten rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes ausdrücken, heissen die *homogenen Koordinaten des Punktes*. Wie heisst die Gleichung der geraden Linie in homogenen Koordinaten?

227. Wieviele Systeme homogener Koordinaten x, y, z giebt es, welche einen gegebenen Punkt darstellen (s. Aufg. 226)?

228. Drei Grössen u, v, w , deren Verhältnisse $\frac{u}{w}, \frac{v}{w}$ die Koordinaten einer geraden Linie sind, heissen *homogene Linienkoordinaten*. Wie heisst die Gleichung eines Punktes in homogenen Linienkoordinaten?

229. Wieviel Systeme homogener Linienkoordinaten u, v, w giebt es, welche eine bestimmte gerade Linie darstellen (s. Aufgabe 228)?

230. Wie erhält man folgenden Satz: Die Koeffizienten der Veränderlichen in der homogenen Gleichung einer geraden Linie sind die homogenen Koordinaten der geraden Linie; die Koeffizienten der Veränderlichen in der homogenen Gleichung eines Punktes sind die homogenen Koordinaten des Punktes (s. Aufg. 226 bei 228)?

231. Wie lautet die Gleichung der geraden Linie in homogenen Koordinaten, welche ganz in unendlicher Ferne liegt, für welche also die Werte der rechtwinkligen Koordinaten unendlich gross sind?

232. Welches geometrisches Bild stellt die Gleichung $z = 0$ dar?

233. Welches geometrisches Bild stellt die Gleichung $w = 0$ dar?

234. Wenn drei gerade Linien, welche ein Dreieck bilden, durch die Gleichungen:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

gegeben sind, wie kann man die Grössen a_1, a_2, a_3 bestimmen, dass die Gleichung $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ die gerade Linie darstellt, deren Gleichung $ax + by + c = 0$ ist?

235. Warum darf in Aufgabe 234 nicht angenommen werden, dass die drei geraden Linien $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$, einen Punkt gemein haben?

236. Mit Hilfe der Aufgabe 234 soll die Aufgabe 165 gelöst werden.

237. Mit Hilfe der Aufgabe 234 sollen die Eigenschaften des vollständigen Vierecks abgeleitet werden.

238. Mit Hilfe der Aufgabe 234 soll die Aufgabe 78 gelöst werden (s. Aufg. 243, 244 etc.).

239. Nimmt man auf der geraden Linie $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ einen Punkt x, y an, setzt diese Werte in die Gleichung der geraden Linie, welche geometrische Bedeutung haben dann die Grössen A_1, A_2, A_3 (s. Aufg. 47)?

240. Wenn drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, durch ihre Gleichungen:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

gegeben sind, wie kann man die Grössen a_1, a_2, a_3 bestimmen, dass die Gleichung $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ einen Punkt darstellt, dessen Gleichung $au + bv + c = 0$ ist?

241. Nimmt man durch den Punkt $a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$ eine gerade Linie u, v an, setzt diese Werte in die Gleichung des Punktes, welche geometrische Bedeutung haben, die Grössen

$$m A_1, m A_2, m A_3, \text{ wenn } m = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \text{ ist?}$$

242. Wie ändern sich die Betrachtungen in den Aufgaben 234—242, wenn statt der Gleichungen in der Normalform die Gleichungen in der allgemeinen Form gegeben sind?

243. Man soll angeben, unter welcher Bedingung zwei gerade Linien:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$

$$a'_1 A_1 + a'_2 A_2 + a'_3 A_3 = 0$$

zu einander senkrecht sind, wenn der Anfangspunkt der rechtwinkligen Koordinaten im Innern des Dreiecks liegt und wenn die den Seiten $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$ gegenüberliegenden Winkel gleich M_3, M_2, M_1 sind.

244. Wie heisst die Gleichung der Normalen zu $A_3 = 0$ in dem Endpunkte M_2 (s. Aufg. 243)?

245. Wie heisst die Gleichung der Normalen zu $A_3 = 0$ in dem Punkte, welcher von M_2 in der Linie $M_1 M_2$ die Entfernung p hat?

246. Man soll die trigonometrischen Funktionen des Winkels bestimmen, welchen die beiden geraden Linien:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$

$$a'_1 A_1 + a'_2 A_2 + a'_3 A_3 = 0$$

einschliessen.

247. Ein Punkt habe von den Dreiecksseiten die Entfernungen A'_1, A'_2, A'_3 ; wie heisst die Gleichung der geraden Linie, welche durch diesen Punkt geht und senkrecht auf der Geraden $A_1 = 0$ steht?

248. Ein Dreieck, dessen Seiten die Gleichungen:

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = 0$$

haben, sei die Grundlage eines neuen Koordinatensystems; die Seiten des Dreiecks bilden mit drei gegebenen Richtungslinien A'_1, A'_2, A'_3 Winkel, deren Sinus bezeichnet seien mit:

$$-\frac{1}{\sin(A_1 A'_1)} = \kappa, \quad -\frac{1}{\sin(B_1 B'_1)} = \lambda, \quad -\frac{1}{\sin(CC')} = \mu.$$

Ein Punkt habe in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung im Innern des Dreiecks liegt, die Koordinaten xy ; zieht man durch (xy) eine gerade Linie parallel A' , so sei die Länge dieser Linie bis zum Schnitt mit der Dreiecksseite $A_1 = 0$ mit a bezeichnet; die Länge der durch xy mit A'_2 parallel gezogenen Geraden bis zum Schnitt mit der Seite $A_2 = 0$ sei b , und endlich die Länge der durch xy zu A'_3 parallel gezogenen Geraden zwischen dem Punkte xy und dem Schnittpunkte auf $A_3 = 0$ sei c . Wie sind die *Dreieckskoordinaten des Punktes* a, b, c durch die Seiten des Dreiecks und die Grössen κ, λ, μ bestimmt? Wenn sind diese Koordinaten gleich A_1, A_2, A_3 ?

249. Welchen Punkt stellen bei gegebenem Dreieck und gegebenen Richtungslinien A'_1, A'_2, A'_3 die Dreieckskoordinaten ma, mb, mc dar (s. Aufg. 248)?

250. Wie kann man in Aufg. 248 a, b, c mittelst x, y, z ausdrücken?

251. Durch welche Grössen sind die $\sin(a A'_1), \sin(b A'_2), \sin(c A'_3)$ bestimmt (s. Aufg. 248)?

252. Wie bestimmt man x, y, z durch a, b, c (s. Aufg. 248)?

253. Es seien die homogenen Koordinaten u, v, w einer geraden Linie gegeben, wodurch — durch welche *Substitution* — geht die Gleichung $ux + vy + wz = 0$ in die Gleichung $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$ über? oder: wie erhält man die *Dreieckskoordinaten der Linie* α, β, γ durch die Linienkoordinaten u, v, w ?

254. Wie bestimmt man u, v, w durch α, β, γ (s. Aufg. 253)?

255. Es soll bewiesen werden: Die Koeffizienten der Veränderlichen in einer Punktgleichung der Dreieckskoordinaten sind die Koordinaten des Punktes in Bezug auf das Dreieck, und die Koeffizienten der Veränderlichen in der Gleichung

einer Geraden der Dreieckskoordinaten sind die Koordinaten der geraden Linie in Bezug auf das Dreieck.

256. Es sei die gerade Linie, deren Gleichung ist:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$

mittelst der Schnittpunkte auf den Seiten $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ zu bestimmen (s. Aufg. 248).

257. Welche gerade Linie wird durch die Gleichung:

$$A_1 \sin M_1 + A_2 \sin M_2 + A_3 \sin M_3 = 0$$

bestimmt? Die Werte von M_1 , M_2 , M_3 siehe Aufg. 243 (s. Aufg. 248).

258. Die Länge der Seiten des Dreiecks $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ seien s_1 , s_2 , s_3 ; wie gross ist der Inhalt des Dreiecks, bestimmt durch die Grösse der Seiten und A_1 , A_2 , A_3 ?

259. Welchen Wert hat der Ausdruck $s_1 A_1 + s_2 A_2 + s_3 A_3$ für einen beliebigen Punkt und was bedeutet er gleich Null gesetzt (s. Aufg. 248, 258)?

260. Wie kann man die Gleichung $A_1 = p$ homogen machen in A_1 , A_2 , A_3 (s. Aufg. 248, 258)?

261. Die Gleichung einer zu der geraden Linie

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$

parallelen geraden Linie soll in Dreieckskoordinaten bestimmt werden (s. Aufg. 248).

262. Welche gerade Linie stellt die Gleichung

$$\sin M_1 \cdot A_1 + \sin M_2 \cdot A_2 = 0$$

dar? Die Bedeutung von M_1 , M_2 siehe Aufg. 257 (s. Aufg. 248).

263. Welche geometrische Bedeutung haben die Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_1 \sin M_1 + A_2 \sin M_2 = 0, \\ A_1 \sin M_1 - A_2 \sin M_2 = 0? \end{aligned}$$

Siehe Aufg. 262.

264. Wie gross ist die Entfernung zweier Punkte, deren Dreieckskoordinaten A'_1 , A'_2 , A'_3 und A''_1 , A''_2 , A''_3 sind, in Dreieckskoordinaten ausgedrückt (s. Aufg. 248)?

265. Es sei der Inhalt eines Dreiecks zu bestimmen, dessen Eckpunkte die Dreieckskoordinaten A'_1 , A'_2 , A'_3 ; A''_1 , A''_2 , A''_3 ; A'''_1 , A'''_2 , A'''_3 haben (s. Aufg. 248).

266. Wie heissen die Dreieckskoordinaten eines Punktes, welcher die Verbindungslinie der beiden Punkte A'_1, A'_2, A'_3 ; A''_1, A''_2, A''_3 im Verhältniss $\frac{a}{b}$ teilt (s. Aufg. 248)?

267. Es soll mit Hilfe von Dreieckskoordinaten bewiesen werden: Wenn man in der Mitte der Seiten eines Dreiecks Senkrechte errichtet, so schneiden diese sich in einem Punkte, welcher mit dem Schnittpunkte der Höhen und dem der Halbierungslinien der Seiten in einer geraden Linie liegt.

268. Es sei der Punkt, dessen Gleichung ist:

$$a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 = 0$$

mittelst seiner Entfernungen von den Punkten $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$ zu bestimmen (s. Aufg. 248).

269. Die Längen der Seiten eines Dreiecks, dessen Endpunkte die Gleichungen $A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = 0$ haben, seien s_1, s_2, s_3 , wie gross ist der Inhalt des Dreiecks?

270. Wie heissen die Dreieckskoordinaten einer geraden Linie, welche den Winkel zwischen zwei durch ihre Dreieckskoordinaten gegebenen geraden Linien in einem gegebenen Verhältniss $a:b$ teilt?

271. Mit Hilfe der Dreieckskoordinaten des Punktes und der Dreieckskoordinaten der Linie sollen die Aufg. 181, 183, 188, 189—218 gelöst werden.

272. Es soll die Bedingung gefunden werden, unter der drei Paare von geraden Linien MM', NN', PP' sich in drei Punkten schneiden, welche in einer geraden Linie liegen. Man nehme die geraden Linien MNP als die Seiten eines Koordinatendreiecks.

273. Wie heisst die Umkehrung der Aufg. 272 und gilt sie allgemein?

274. Man soll die Bedingung finden, unter der drei Paare von Punkten MM', NN', PP' so liegen, dass deren Verbindungslinien sich in *einem* Punkte schneiden.

275. Wie heisst die Umkehrung der Aufg. 274?

276. Wie folgen die Aufg. 167 und 168 aus den Aufgaben 272—275?

277—287. Das Prinzip der *Dualität* (Reciprocität) an den Sätzen über das Pascalsche und Brianchonsche Sechseck anzuwenden:

Es giebt 60 verschiedene Sechsecke mit sechs gegebenen Ecken. Diese Sechsecke sind alle Pascalsche Sechsecke, wenn eines derselben ein Pascalsches Sechseck ist.

Die Pascalschen Geraden der Sechsecke mit den Ecken

1 2 3 4 5 6

1 4 3 6 5 2

1 6 3 2 5 4

schneiden sich in *einem* Punkte *P*. Steiners Punkt.

Von den sechzig Pascalschen Geraden gehen drei und drei durch einen Punkt *P*, so dass zwanzig solcher Punkte entstehen, und von diesen zwanzig Punkten liegen fünfzehn mal vier in einer Steinerischen Geraden *g*, so dass jeder in drei solchen Geraden liegt.

Wenn drei Dreiecke dreien geraden Linien, welche sich in *einem* Punkte schneiden, einbeschrieben sind, so bilden die entsprechenden Seiten der drei Dreiecke wieder drei Dreiecke, welche drei geraden Linien einbeschrieben sind, die von einem anderen Punkte ausgehen.

Es giebt 60 verschiedene Sechsecke mit sechs geraden Linien als Seiten. Die Sechsecke sind alle Brianchonsche Sechsecke, wenn eines derselben ein Brianchonsches Sechseck ist.

Die Brianchonschen Punkte der Sechsecke mit den Seiten

1 2 3 4 5 6

1 4 3 6 5 2

1 6 3 2 5 4

liegen auf einer und derselben geraden Linie *L*.

Von den sechzig Brianchonschen Punkten liegen drei und drei in einer geraden Linie *L*, so dass zwanzig solcher geraden Linien entstehen, und von diesen zwanzig geraden Linien gehen fünfzehn mal vier durch einen Punkt, so dass jede gerade Linie drei solcher Punkte enthält.

Wenn die entsprechenden Seiten von drei Dreiecken durch drei Punkte gehen, welche auf *einer* geraden Linie liegen, so schneiden sich die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken je zweier Dreiecke in einem Punkte und die drei Schnittpunkte liegen auf einer geraden Linie.

Die drei vierten harmonischen Linien zu den drei Pascalschen Geraden der Sechsecke

1 2 3 4 5 6
1 4 3 6 5 2
1 6 3 2 5 4

schneiden die drei vierten harmonischen Linien zu den drei Pascalschen Geraden der Sechsecke

1 2 3 6 5 4
1 6 3 4 5 2
1 4 3 2 5 6

in neun Punkten, welche auf den Seiten und den Diagonalen des Sechsecks liegen.

Die Pascalschen Geraden der Sechsecke

1 2 3 4 5 6
1 6 3 2 4 5
1 5 6 3 4 2

schneiden sich in einem Kirkmanschen Punkt.

Die Pascalschen Geraden schneiden sich zu dreien in sechzig Kirkmanschen Punkten, welche zu dreien auf zwanzig geraden Linien liegen.

Die drei vierten harmonischen Punkte zu den drei Brianchonschen Punkten der Sechsecke

1 2 3 4 5 6
1 4 3 6 5 2
1 6 3 2 5 4

liegen mit den drei vierten harmonischen Punkten zu den drei Brianchonschen Punkten der Sechsecke

1 2 3 6 5 4
1 6 3 4 5 2
1 4 3 2 5 6

auf neun geraden Linien, welche sich auf den Seiten und Diagonalen des Sechsecks schneiden.

Die Brianchonschen Punkte der Sechsecke

1 2 3 4 5 6
1 6 3 2 4 5
1 5 6 3 4 2

liegen auf ein und derselben geraden Linie.

Die Brianchonschen Punkte liegen zu dreien auf sechzig geraden Linien, welche zu dreien durch zwanzig Punkte gehen.

Über Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen.

288. Welcher Ort ist durch die Gleichung $x^2 = 25$ dargestellt?

289. Welcher Ort ist durch die Gleichung $x^2 + 2x + 17 = 16$ dargestellt?

290. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung:

$$x^3 + 3x^2 + 9\frac{1}{2}x + 27 = (3\frac{1}{4}x + 13) + (3\frac{1}{4}x + 13)?$$

291. Stellt die Gleichung $x^3 - 6yx^2 - y^2x + 6y^3 = 0$ gerade Linien dar?

292. Bestimme den Ort der Gleichung:

$$6x^2 + 8xy + 2y^2 = 0.$$

293. Welchen Ort bestimmt die Gleichung:

$$xy + (x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy?$$

294. Stellt die Gleichung $x^2 - 6xy \sin \vartheta + y^2 = 0$ gerade Linien dar?

295. Werden durch die Gleichung:

$$x^6 - y^2x^4 + 2y^4x^2 - y^6 = 2y^2x^4 - y^4x^2$$

gerade Linien dargestellt?

296. Welchen Ort stellt die Gleichung:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy = 0$$

dar? Wie sind die Koeffizienten A, B, C zu bestimmen, damit der Ort reell, imaginär ist und die Werte $\frac{x}{y}$ gleich werden?

297. Welchen Ort stellt die Gleichung:

$$x^4 - 5x^3 - x^2y^2 + 5y^2x + 6x^2 - 6y^2 = 0$$

dar?

298. Welchen Winkel bilden die durch die Gleichung $x^2 - pxy + qy^2$ dargestellten geraden Linien?

299. Wie gross ist der Winkel zwischen den Linien:

$$1) x^2 + xy - y^2 = 0? \quad 2) x^2 - xy + y^2 = 0?$$

300. Es sei die Gleichung der geraden Linie zu finden, welche den Winkel zwischen den geraden Linien:

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0$$

im Verhältnis $a':b'$ teilt.

301. Es sei die Bedingung zu bestimmen, unter welcher die allgemeine Gleichung zweiten Grades:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz = 0$$

ein Linienpaar darstellt; welche Gestalt nimmt die Gleichung an?

302. Stellt die Gleichung:

$$4x^2 - 5xy + y^2 + 2x + y - 2 = 0$$

gerade Linien dar?

303. Bestimme den Ort der Gleichung:

$$(ax + by - c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)(x^2 + y^2 - c^2).$$

304. Wie gross ist in der folgenden Gleichung:

$$a_{11}x^2 + 6xy - y^2 + 5x - 7y + 5 = 0$$

die Grösse a_{11} , damit die Gleichung eine gerade Linie darstellt?

305. Man soll a_{12} so bestimmen, dass die Gleichung:

$$x^2 + 2a_{12}xy + y^2 - 6x + 9y - 11 = 0$$

ein Linienpaar darstelle.

306. Man soll a_{13} so bestimmen, dass die Gleichung:

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2a_{13}x - 7y + 6 = 0$$

ein Linienpaar repräsentiert.

307. Wieviel Bedingungsgleichungen müssen erfüllt sein, damit die allgemeine Gleichung vom Grade n gerade Linien oder Punkte darstellt, je nachdem man die Veränderlichen als Punkt- oder Linienkoordinaten betrachtet?

Anmerkung. Wie ändern sich die Resultate der Aufgaben dieses Abschnitts, wenn man statt x, y die Linienkoordinaten u, v einführt?

Der Kreis.

308. Den geometrischen Ort des Punktes zu bestimmen, welcher von einem festen Punkte eine gegebene Entfernung hat; oder mit anderen Worten: Die Gleichung des Kreises zu finden, dessen Mittelpunkt der Punkt α, β und dessen Radius r ist.

309. Welchen Ort stellt die Gleichung:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

dar? Wie heisst die Gleichung in Polarkoordinaten?

310. Unter welcher Bedingung stellt die allgemeine Gleichung des zweiten Grades:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

einen Kreis dar?

311. Man bringe die Gleichungen:

1) $x^2 + y^2 - 6x = 8y - 9,$

2) $x^2 + y^2 - 8x = 6y - 9,$

3) $x^2 + 5y^2 - 7x = 5y + 3 + 4y^2$

in die Form $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$, und wie liegen die Kreise gegen die Koordinatenachsen?

312. Wie heissen die Gleichungen von zwei konzentrischen Kreisen?

313. In wieviel Punkten schneidet eine gerade Linie einen Kreis?

314. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = 2\sqrt{\frac{1}{2}}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 225, \\ 4x + 3y = 105; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ 6x + y = 9; \end{cases}$

5) $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25, \\ 3x + 4y = 35; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34, \\ 7x - 2y = 29; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 49, \\ x = 2y. \end{cases}$

315. Die Gleichung der *Tangente* zu finden, welche im Punkte x', y' an einen gegebenen Kreis gezogen werden kann.

316. Die Berührungspunkte der von einem gegebenen Punkte aus an einen Kreis gezogenen Tangenten zu finden.

317. Die Länge der Tangente zu finden, welche von einem beliebigen Punkte an den Kreis, dessen Gleichung:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$$

ist, gezogen wird.

318. Welche Bedeutung hat der Ausdruck:

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = A,$$

wenn x, y nicht auf dem Kreise $A = 0$ liegt?

319. Wieviel Tangenten kann man von einem Punkte aus an den Kreis ziehen?

320. Die Gleichung der Tangenten von einem gegebenen Punkte an einen gegebenen Kreis zu finden.

321. Zu beweisen, dass die Tangente des Kreises auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht steht.

322. Finde die Gleichung der Tangente im Punkte $(5, 5)$ des Kreises $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$.

323. Bestimme die Gleichung der Tangente im Punkte $(4, 5)$ des Kreises $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 10$.

324. Wie heisst die Gleichung der die Punkte x', y' ; x'', y'' verbindenden Sehne im Kreise $x^2 + y^2 = r^2$?

325. Unter welcher Bedingung berührt die gerade Linie $Ax + By + C = 0$ den Kreis $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0$?

326. Man nennt zwei Punkte, deren Verbindungslinie den Kreis in einem Punktepaar schneidet, welches harmonisch ist zu den beiden Punkten, *harmonische Pole des Kreises*. Es soll der geometrische Ort des, einem gegebenen Punkte zugeordneten, harmonischen Poles des Kreises bestimmt werden. Der gegebene Punkt heisst *Pol* des geometrischen Ortes, und der geometrische Ort heisst *Polare* des gegebenen Punktes.

327. Welche Eigenschaften hat die Polare eines Punktes in Bezug auf die gerade Linie, welche den Punkt mit dem Mittelpunkt des Kreises verbindet?

328. Bestimme die Polare des Mittelpunktes eines Kreises.

329. Beweise den Satz: Harmonische Pole eines Kreises haben die Eigenschaft, dass die Polare des einen durch den andern geht.

330. Wenn ein Punkt eine gerade Linie durchläuft, so dreht sich seine Polare um den Pol der geraden Linie. Wie heisst der Satz umgekehrt?

331. Wenn der Pol in der Peripherie des Kreises liegt, welche Eigenschaften hat die Polare?

332. Konstruiere mit Hilfe der Polaren die von einem Punkte nach dem Kreise gehenden Tangenten.

333. Bestimme die Polare vom Punkt $(1, 3)$ in Bezug auf den Kreis:

- | | |
|----------------------------------|-------------------------------|
| 1) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 10,$ | 4) $x^2 + y^2 = 7,$ |
| 2) $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 10,$ | 5) $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 8,$ |
| 3) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13,$ | 6) $x^2 + y^2 - x - y = 4.$ |

Bestimme die Gleichungen der Tangenten an diese resp. Kreise, welche durch den Punkt $(1, 3)$ gehen.

334. Setze in Aufg. 333 statt des Punktes $(1, 3)$ nach einander die Punkte $(4, 4)$, $(3, 5)$, $(7, 11)$, $(15, 19)$, $(7, 2)$.

335. Bestimme den Pol der Polare $4x + 3y = 7$, in Bezug auf den Kreis:

- 1) $(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 2,$
- 2) $x^2 + y^2 = 25,$
- 3) $x^2 + y^2 - 4x - 3y = 3,$
- 4) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 10,$
- 5) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 10,$
- 6) $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 = 34.$

336. Setze in Aufg. 335 statt der Polaren $4x + 3y = 7$ folgende Polaren:

- 1) $9x + 2y = 1,$
- 2) $4x + y = 3,$
- 3) $x - y = -8,$
- 4) $x + 8y = 9,$
- 5) $7x - 25y = -11.$

337. Bestimme den Pol von $Ax + By + C = 0$ in Bezug auf den Kreis $x^2 + y^2 = a^2$.

338. Die Gleichung eines Kreises zu finden, der durch drei Punkte geht.

339. Die Bedingung zu finden, unter der vier Punkte in einem Kreise liegen.

340. Wie heisst die Gleichung des Kreises, welcher durch die Punkte:

- 1) $(1, 2), (3, 4), (5, 6),$
- 2) $(2, 3), (4, 5), (6, 1),$
- 3) $(0, 0), (2, 2), (1, 2),$
- 4) $(0, 1), (2, 3), (4, 5),$
- 5) $(7, 1), (8, 1), (2, 3),$
- 6) $(7, 1), (3, 1), (1, 5)$

geht?

341. Die Bedingung zwischen den Koordinaten u, v einer geraden Linie zu bestimmen, unter welcher die gerade Linie

Tangente des Kreises ist, dessen Mittelpunkt durch die Gleichung $au + bv = -1$ und dessen Radius gegeben ist.

342. Welchen Ort stellt die Gleichung

$$(au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0$$

dar (s. Aufg. 341)?

343. Unter welcher Bedingung stellt die allgemeine Gleichung des zweiten Grades

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0$$

einen Kreis dar (s. Aufg. 341)?

344. Welche geometrische Bedeutung hat der Ausdruck:

$$\left(\frac{au + bv + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^2 - r^2 = A,$$

wenn die gerade Linie u, v den Kreis $A = 0$ nicht berührt (s. Aufg. 341)?

345. Die Gleichung $(au + bv + w)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0$ eines Kreises ist gegeben und die Koordinaten zweier geraden Linien $u_0, v_0; u_1, v_1$; es sollen die Koordinaten der Tangenten bestimmt werden, welche sich von dem Schnittpunkte der gegebenen geraden Linien an den Kreis ziehen lassen.

346. Zwei gerade Linien, welche harmonisch sind mit dem Tangentenpaare, welches sich vom Schnittpunkte der geraden Linien an den Kreis legen lässt, heissen *harmonische Polaren des Kreises*, und es soll gezeigt werden mittelst Linienkoordinaten, dass alle einer gegebenen geraden Linie zugeordneten harmonischen Polaren eines Kreises sich in dem Pole der geraden Linie schneiden.

347. Die Gleichung des Poles der durch ihre Koordinaten u_1, v_1 gegebenen geraden Linie in Bezug auf einen gegebenen Kreis darzustellen.

348. Mit Hilfe der Polaren zu zeigen, dass das einem Kreise eingeschriebene Sechseck ein Pascalsches Sechseck ist.

349. Wie folgt aus Aufg. 348, dass das einem Kreise umschriebene Sechseck ein Brianchonsches Sechseck ist?

350. Wenn ein Dreieck A, B, C und ein Kreis gegeben ist, so bilden die Polaren der Ecken A, B, C in Bezug auf den Kreis ein neues Dreieck $A'B'C'$, welches dem Dreieck

ABC konjugiert heisst; es soll bewiesen werden, dass die geraden Linien AA' , BB' , CC' , welche die entsprechenden Ecken eines Dreiecks und des ihm konjugierten verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

351. Einem gegebenen Kreise sei ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen.

352. Einem gegebenen Kreise sei ein Dreieck zu umschreiben, dessen Ecken in drei ein gegebenes Dreieck bildenden geraden Linien liegen.

353. Wenn zwei Punkte M , N und deren Polaren in Bezug auf einen Kreis mit dem Mittelpunkte O gegeben sind und man die Senkrechte MP von M auf die Polare von N und eine Senkrechte NQ von N auf die Polare von M zieht, so soll gezeigt werden, dass ist $OM : MP = ON : NQ$.

354. In welchem Punkte schneidet die gerade Linie:

den Kreis $(x - \alpha) \cos \vartheta + (y - \beta) \sin \vartheta = r$
 $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$

und wenn berührt die gerade Linie den Kreis?

355. Wie heissen die Koordinaten des Durchschnittspunktes der in zwei gegebenen Punkten des Kreises gezogenen Tangenten?

356. Den geometrischen Ort des Durchschnitts der Tangenten an den Endpunkten einer Sehne von gegebener Länge zu finden.

357. Eine Sehne von konstanter Länge ist in einem Kreis eingeschrieben, welchen geometrischen Ort bestimmt sie?

358. Auf der Sehne Aufg. 357 nehme man einen Punkt an, der die Länge in dem Verhältnisse $a : b$ teilt, welchen Ort beschreibt der Punkt?

359. Bestimme den Ort der Aufg. 153, 154, 156.

360. Es ist eine Anzahl von Punkten gegeben; es soll der geometrische Ort des Punktes bestimmt werden, der so liegt, dass die Summe der n' , n'' , $n''' \dots$ fachen Quadrate seiner Entfernungen vom ersten, zweiten, dritten etc. Punkte eine bestimmte Grösse sei.

361. Es ist eine Anzahl von Punkten gegeben; es soll der Ort bestimmt werden, den eine gerade Linie umhüllt, wenn die gerade Linie so gelegt wird, dass das n' -fache des Perpendikels auf sie vom ersten Punkte plus dem n'' -fachen des Perpendikels auf sie vom zweiten Punkte etc. eine konstante Summe giebt.

362. Durch einen Punkt O ziehe man zu den Seiten eines gegebenen Dreiecks Parallelen, welche die Dreiecksseiten in den Punktpaaren $B, C; C', A'; A'', B''$ schneiden; welchen geometrischen Ort bestimmt der Punkt O , wenn die Gleichung:

$$BO \cdot OC + C'O \cdot OA' + A''O \cdot OB'' = \text{konstant}$$

besteht?

363. Es soll der Ort eines Punktes O so bestimmt werden, dass die Verbindungslinie desselben mit einem festen Punkte A denselben Abschnitt in der x -Axe bilde, wie die in O auf OA errichtete Senkrechte in der Axe der y .

364. Den Ort eines Punktes so zu bestimmen, dass die in den Ecken eines Dreiecks auf ihren Verbindungslinien mit ihm errichteten Senkrechten sich in einem Punkte durchschneiden.

365. Den Ort des Mittelpunktes der parallelen Sehnen eines Kreises zu finden.

366. Den Ort des Mittelpunktes der Sehnen eines Kreises zu finden, welche durch einen Punkt gehen.

367. Die Bedingung anzugeben, unter welcher der durch den Kreis in der Linie $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ gebildete Abschnitt einen Winkel von der Grösse β am Punkte x', y' fasse.

368. Wie heisst in Aufgabe 367 die Bedingung, wenn $\beta = 90^\circ$?

369. Den Ort des Mittelpunktes einer Sehne zu finden, wenn diese Sehne Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebenem Scheitel des rechten Winkels ist.

370. Sei O der Anfangspunkt der Koordinaten und schneide die gerade Linie

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$$

den Kreis

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in den Punkten A und B ; es soll die Bedingung angegeben werden, wenn der Winkel AOB ein rechter Winkel ist.

371. Fällt man in Aufg. 370 von O eine Senkrechte auf AB , dreht den rechten Winkel um O , welchen Ort beschreibt der Schnittpunkt von AB mit der Senkrechten?

372. Den geometrischen Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit gegebenem Radius, welcher eine gegebene $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade Linie} \\ \text{Kreisperipherie} \end{array} \right.$ berührt, zu bestimmen.

373. Den geometrischen Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit gegebenem Radius, welcher eine gegebene $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade Linie} \\ \text{Kreisperipherie} \end{array} \right.$ unter einer gegebenen Sehne schneidet, zu bestimmen.

374. Den Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit gegebenem Radius, welcher eine gegebene $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade Linie} \\ \text{Kreisperipherie} \end{array} \right.$ so schneidet, dass die Tangenten in den Schnittpunkten der geraden Linie und des Kreises mit der geraden Linie einen gegebenen Winkel bilden, zu bestimmen; oder kürzer: Der Ort für den Mittelpunkt eines Kreises mit gegebenem Radius, welcher eine gegebene $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerade Linie} \\ \text{Kreisperipherie} \end{array} \right.$ unter gegebenem Winkel schneidet, ist zu bestimmen.

375. Der geometrische Ort für den Mittelpunkt des Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte geht, ist zu finden.

376. Den geometrischen Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene gerade Linien (oder einen gegebenen Kreis) berührt, zu bestimmen.

377. Man soll den Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei gegebene gerade Linien L, L' unter gegebenen Sehnen s und s' schneidet, bestimmen.

378. Man soll den Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der zwei gegebene (parallele) gerade Linien L, L' bezüglich unter den gegebenen Winkeln α und α' schneidet, finden.

379. Es sei der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der von zwei gegebenen geraden Linien die eine berührt und die andere unter einer gegebenen Sehne schneidet, zu finden.

380. Es sei der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, der von zwei gegebenen geraden Linien die eine berührt, die andere unter gegebenem Winkel schneidet, zu bestimmen.

381. Man ziehe durch einen festen Punkt O eine Sehne, welche einen Kreis in den Punkten P, P' schneidet; welchen Ort beschreibt der Punkt Q auf OP , wenn $OP + OP' = 2OQ$ ist? Wie gross ist das Rechteck aus den Seiten OP, OP' ?

382. Welche bekannte Linie beschreibt in Aufgabe 381 der Punkt Q , wenn die Punktepaare $O, Q; P, P'$ harmonisch getrennt sind?

383. Wenn von einem Dreieck der Scheitel, der Scheitelwinkel und das Verhältniss der anliegenden Seiten gegeben ist, eine der Basisecken in einem Kreise oder in einer geraden Linie sich bewegt, welchen Ort beschreibt die andere Basis-ecke?

384. Wie ändert sich Aufgabe 383, wenn statt des Verhältnisses der Seiten das Produkt derselben gegeben ist?

385. Wenn durch einen Punkt M in dem Umfange eines Kreises drei willkürliche Sehnen gezogen werden und über jeder Sehne als Durchmesser ein Kreis gelegt wird, so schneiden sich diese drei Kreise in drei Punkten, welche in einer geraden Linie liegen.

Diese Aufgabe und sehr viele der vorhergehenden Aufgaben löst man mittels Polarkoordinaten.

Systeme von Kreisen.

386. In welchen Punkten schneiden sich die Kreise:

- | | |
|---|---|
| 1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ (x - 5)^2 + y^2 = 9; \end{cases}$ | 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 5y + 7 = 0, \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 0; \end{cases}$ |
| 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6x - 7y = 8, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$ | 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x + 6y - 9 = 0, \\ (x^2 + (y - 3)^2 = 0; \end{cases}$ |
| 3) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = 1; \end{cases}$ | 6) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 5x - 4y - 7 = 0, \\ x^2 + y^2 + 5x = 3? \end{cases}$ |

387. Die Gleichung der *Radikalaxe* oder der *Chordalen* oder der *Potenzlinie* der Kreise:

$$S \equiv (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - r^2 = 0,$$

$$S' \equiv (x - \alpha')^2 + (y - \beta')^2 - r'^2 = 0$$

zu bestimmen.

388. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung $S - \lambda S' = 0$, wenn λ alle möglichen Werte annehmen kann (s. Aufg. 387)?

389. Kann λ so bestimmt werden, dass die Gleichung in 388 eine gerade Linie darstellt?

390. Der geometrische Ort der Punkte, von welchen die an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gleich lang sind, ist zu bestimmen.

391. Der geometrische Ort der Punkte, von welchen die an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten ein gegebenes Verhältniss haben, ist zu bestimmen. Welchen Winkel bildet der Ort mit der Verbindungslinie des Mittelpunktes?

392. Wann ist die Radikalaxe zweier Kreise Tangente an dem einen Kreis?

393. Bestimme für die Kreise in Aufgabe 386 die Radikalaxe.

394. Bestimme den geometrischen Ort eines Punktes, der in Beziehung auf zwei Kreise gleiche *Potenzen* hat, wenn man unter Potenz eines Punktes in Beziehung auf einen Kreis das Rechteck der beiden Segmente jeder durch den Punkt gezogenen geraden Linie, die zwischen ihm und dem Kreisumfange liegen, versteht.

395. Wenn drei Kreise gegeben sind, und man sucht für jedes Paar derselben die Radikalaxe, in welchen Punkten schneiden sich diese drei geraden Linien?

396. Bestimme den *Chordalpunkt* oder das *Radikalcentrum* der drei Kreise:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 7,$$

$$(x + 1)^2 + (y + 4)^2 = 5,$$

$$(x - 5)^2 + (y - 8)^2 = 3.$$

397. Legt man durch zwei Punkte alle Kreise und schneidet diese Kreise mit einem gegebenen Kreis, so gehen alle Radikalaxen durch einen Punkt. Warum?

398. Wie lautet die Gleichung aller Kreise, welche eine gemeinschaftliche Radikalaxe haben, wenn die Radikalaxe die Axe der y ist und man die Verbindungslinie der Centren zur Axe der x macht?

399. Unter Voraussetzung des Koordinatensystems in Aufgabe 398, welchen Ort stellt die Gleichung $x^2 + y^2 - 2\kappa x \pm d^2 = 0$ dar, wenn d konstant ist und κ verschiedene Werte annehmen kann?

400. Unter Voraussetzung des Koordinatensystems in Aufgabe 398 zu beweisen, dass die Polare eines beliebig gegebenen Punktes in einem Systeme von Kreisen, welche eine gemeinschaftliche Radikalaxe haben, durch einen und denselben Punkt gehen.

401. Können in Aufgabe 400 zwei Punkte so bestimmt werden, dass ihre Polare in Bezug auf irgend einen der Kreise ganz fest sind? *Grenzpunkte des Systems der Kreise.*

402. Man zeige: Ein System von Kreisen, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, hat zwei imaginäre Grenzpunkte, wenn die gegebenen Punkte reell sind; das System von Kreisen hat reelle Grenzpunkte, wenn die Kreise sich in imaginären Punkten schneiden.

403. Unter den Kreisen des Systems $S - \lambda S' = 0$ giebt es zwei Kreise, deren Radien verschwinden; bestimme für diese Kreise λ und ihre Lage zu den Grenzpunkten des Systems (s. Aufg. 388).

404. Wenn man von irgend einem Punkte der Radikalaxe Tangenten an alle Kreise, die durch zwei Punkte gehen, zieht, so ist der Ort der Berührungspunkte zu suchen.

405. Giebt es einen Kreis, welcher alle Kreise des Systems mit der nämlichen Radikalaxe unter rechten Winkeln schneidet und geht er durch die Grenzpunkte des Systems?

406. Wie folgt aus den beiden letzten Aufgaben der Satz: Wenn ein System von Kreisen mit ein und derselben Radikalaxe gegeben ist, so giebt es ein zweites System von Kreisen, welche das erste System senkrecht schneiden und durch die Grenzpunkte des ersten Systems gehen. Sind die Grenzpunkte des einen Systems reell, so sind die Grenzpunkte des andern imaginär.

407. Die Bedingung anzugeben, unter welcher die Kreise:

$$x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0$$

sich rechtwinklig durchschneiden.

408. Es soll der Kreis bestimmt werden, der zu drei Kreisen senkrecht ist:

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 - 2 = 5,$$

$$x^2 + y^2 - 6y = -4,$$

$$(x + 1)^2 + y^2 + 8y = -7.$$

409. Unter welchem Winkel schneidet der Kreis $S = 0$ den Kreis $kS' + lS'' + mS''' = 0$, wenn er die Kreise $S' = 0$, $S'' = 0$, $S''' = 0$ senkrecht schneidet?

410. Warum haben alle Kreise, welche zwei Kreise senkrecht schneiden, eine gemeinsame Radikalaxe?

411. Unter welchem Winkel schneiden sich zwei Kreise, wenn ihre Radikalaxe die gemeinschaftliche Polare der Kreismittelpunkte in Bezug auf den betreffenden andern Kreis ist?

412. Es sei zu beweisen: Wenn MN ein Kreisdurchmesser ist, so geht die Polare des Punktes M in Bezug auf einen Kreis, welcher den Kreis über MN senkrecht schneidet, durch den Punkt N .

413. Welchen Ort beschreibt der Punkt, dessen Polaren in Bezug auf drei Kreise sich in einem Punkte schneiden?

414. Man bestimme den Ort der Mittelpunkte aller Kreise, welche zwei gegebene Kreise rechtwinklig durchschneiden.

415. Ein Kreis schneide zwei durch die Punkte A und B gehende feste Kreise unter gegebenen Winkeln; wie gross sind die Winkel, welche der Kreis mit irgend einem durch A und B gehenden Kreis bildet?

416. Wie folgt aus Aufg. 415 der Satz: Ein Kreis, welcher zwei feste Kreise unter gegebenen Winkeln schneidet, berührt auch zwei feste Kreise?

417. Das Quadrat der Tangente von einem Punkte eines Kreises zu einem andern ist in einem konstanten Verhältniss zu der Senkrechten, von dem Punkt auf ihre Radikalaxe.

418. Bestimme die gemeinschaftliche Tangente der Kreise:

$$\begin{array}{ll}
 1) \begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0, \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0; \end{cases} & 4) \begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ (x - 5)^2 + (y - 7)^2 = 4; \end{cases} \\
 2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16; \end{cases} & 5) \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (x - 1)^2 + y^2 + 2x = 2; \end{cases} \\
 3) \begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0, \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y = 3; \end{cases} & 6) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + 2x + 4y = 7. \end{cases}
 \end{array}$$

419. Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte der Tangenten in Aufg. 418 und welche dieser Punkte sind *Ähnlichkeitspunkte*?

420. Wenn zwei Kreise gegeben sind, so sollen die Punkte bestimmt werden, welche die Verbindungslinie der Mittelpunkte äusserlich und innerlich in dem Verhältniss der Radien theilt. *Äussere und innere Ähnlichkeitspunkte*.

421. Jede durch einen Ähnlichkeitspunkt gezogene gerade Linie schneidet von den Kreisen ähnliche Segmente ab und die an die Endpunkte der ähnlichen Bogen gezogenen Radien sind paarweise einander parallel.

422. Jede durch den Schnittpunkt der gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kreise gezogene gerade Linie wird durch die beiden Kreise im konstanten Verhältniss geteilt.

423. Wenn man durch einen Ähnlichkeitspunkt irgend zwei gerade Linien zieht, welche den ersten Kreis in den Punkten a, a', b, b' und den zweiten in den Punkten $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ schneiden, so sind die Sehnen $ab, \alpha\beta$ und $a'b', \alpha'\beta'$ parallel; in welcher geraden Linie liegen die Schnittpunkte von ab und $\alpha'\beta', a'b'$ und $\alpha\beta$?

424. Von den sechs Ähnlichkeitspunkten je zweier von drei gegebenen Kreisen liegen die drei äusseren Ähnlichkeitspunkte auf einer geraden Linie. Je zwei innere und ein äusserer Ähnlichkeitspunkt bestimmen drei gerade Linien. *Ähnlichkeitsachsen der Kreise*.

425. Die Gleichung der Ähnlichkeitsaxe zu bestimmen, auf welcher die drei äusseren Ähnlichkeitspunkte von drei gegebenen Kreisen liegen.

426. Benutze in Aufg. 425 als Zahlenbeispiel die Aufgaben 396, 408.

427. Wenn ein Kreis zwei gegebene Kreise berührt, so geht die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch einen Ähnlichkeitspunkt der beiden gegebenen Kreise.

428. Es sei gegeben der Kreis K und zwei Parallele D und D_1 , von einem Punkte M auf D zieht man die Tangenten MT , MT' an den Kreis; durch den Punkt A , in welchem MT die gerade Linie D_1 trifft, ziehe man eine Parallele zu MT' die so erhaltene gerade Linie hüllt einen Kreis ein, ebenso die durch den Schnittpunkt von D_1 mit MT' gehende Parallele zu MT . Man soll die Radikalaxe, das Radikalcentrum, die Ähnlichkeitspunkte und Axen der Kreise bestimmen.

429. In Aufg. 428 soll der Punkt M noch die Gerade D beschreiben, und die Kreise beschreibt man wie in Aufg. 428; es soll die Lage von allen in der Figur auftretenden Kreisen bestimmt werden.

430. Vier gerade Linien A , B , C , D sind gegeben; in die Dreiecke ABC , BCD , CDA beschreibe man die berührenden Kreise; es soll deren Radikalaxe, Radikalcentrum, Ähnlichkeitsaxe bestimmt werden.

431. In Aufg. 429 sei a der Punkt, in welchem A durch den in das Dreieck ABC beschriebenen Kreis berührt wird und d der Berührungspunkt der geraden Linie D mit dem in das Dreieck DBC beschriebenen Kreise; man soll beweisen, dass der Mittelpunkt von ad auf der Radikalaxe der in die Dreiecke ABD und ACD beschriebenen Kreise liegt.

432. In den Aufg. 428—431 sollen die Polaren der Ähnlichkeitspunkte, der Radikalcentren und die Pole der Radikalaxen, der Ähnlichkeitsaxen in Bezug auf die auftretenden Kreise bestimmt werden.

433. Wenn zwei Kreise jeden von zwei anderen Kreisen berühren, so sollen die Ähnlichkeitspunkte der beiden ersten Kreise bestimmt werden, welche in der Radikalaxe der zwei anderen Kreise liegt.

434. Die Bedingung aufzustellen, unter welcher der innere Ähnlichkeitspunkt von zwei Kreisen mit dem Radikalcentrum von drei gegebenen Kreisen zusammenfällt.

435. Wenn ein Kreis zwei andere berührt, so liegen die Berührungspunkte immer mit dem zum ersten Kreise gehörigen Pole der Radikalaxe der beiden anderen Kreise in gerader Linie.

436. Man soll den Ort für den Mittelpunkt eines Kreises bestimmen, welcher drei gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet.

437. Den Kreis zu bestimmen, der drei gegebene Kreise berührt durch Bestimmung der Koordinaten seines Berührungspunktes mit einem der gegebenen Kreise.

438. Wie modifizieren sich die Bestimmungen der Radikalaxe und der Ähnlichkeitspunkte zweier Kreise, wenn an die Stelle dieser 1. ein Kreis und ein Punkt, 2. ein Kreis und eine gerade Linie, 3. zwei gerade Linien, 4. eine gerade Linie und ein Punkt, 5. zwei Punkte treten?

439. Es seien drei Kreise K, K_1, K_2 gegeben; O sei ein beliebiger Kreis, welcher mit K eine Tangente $A_1 A_2$, mit K_1 eine Tangente $B_1 B_2$ und mit K_2 eine Tangente $C_1 C_2$ gemein hat; es seien alle Kreise O zu bestimmen derart, dass ist: $A_1 A_2 = B_1 B_2 = C_1 C_2$.

440. Es sei zu beweisen, dass die Kreise O in Aufg. 439 zwei feste Gerade berühren, welche gemeinschaftliche Tangenten sind an zwei Kreisen, welche K, K_1 und K_2 berühren.

441. Tritt zu den Kreisen K in Aufg. 439 noch ein Kreis K_3 , welcher mit O eine gemeinschaftliche Tangente $D_1 D_2$ derart hat, dass ist: $A_1 A_2 = D_1 D_2$, so soll der Kreis O bestimmt werden.

442. Es sind die Radikalcentren je dreier Kreise der in den Aufg. 439 und 441 genannten Kreise K, K_1, K_2, K_3 zu bestimmen und ihre Bogen gegen den Kreis O in Aufg. 441.

443. Wenn man parallel einer geraden Linie Tangenten an die vier Kreise K, K_1, K_2, K_3 zieht, diese vier Tangenten durch eine gerade Linie schneidet, so soll das anharmonische Verhältniss der Schnittpunkte der Tangenten mit der letzten geraden Linie bestimmt werden, oder kürzer: es soll das anharmonische Verhältniss der vier Tangenten angegeben werden.

444. Wenn vier Kreise A, B, C, D von demselben fünften Kreis berührt werden, so sind die Längen ihrer gemeinschaftlichen Tangenten durch die Gleichung:

$$AB \cdot CD \pm AD \cdot BC \pm AC \cdot BD = 0$$

verbunden, wenn AB die Länge einer gemeinschaftlichen Tangente an A und B ist.

445. Drei Kreise mit den Radien r, r_1, r_2 und den Mittelpunkten in den Ecken des Dreiecks von den Seiten a, b, c sind gegeben, es sollen die Radien der Kreise bestimmt werden, welche die drei gegebenen Kreise sämtlich innen oder sämtlich aussen berühren.

446. Die Gleichung zu bestimmen, welche zwischen den Längen der gemeinsamen Tangenten an fünf Kreisen besteht.

447. Wenn man in jedem Radiusvektor OP einer Kurve eine zu OP umgekehrt proportionale Länge OQ abträgt, so *transformiert man durch reciproke Radien* und man nennt den Ort von Q die *Inverse der gegebenen Kurve*. Man bestimme die Inverse des Kreises $x^2 + y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ in Bezug auf 1. den Mittelpunkt, 2. einen beliebigen Punkt (a, b) .

448. Kann die Inverse eines Kreises eine gerade Linie sein?

449. Bestimme die Inverse der geraden Linie $ax + by = c$ in Bezug auf den Punkt O mit den Koordinaten x', y' .

450. Für ein Paar von Kreisen und deren Inversen in Bezug auf irgend einen Punkt ist das Verhältniß des Quadrats einer gemeinschaftlichen Tangente zum Rechteck der Radien der Kreise konstant oder die Winkel, unter denen das erste Paar und die Inversen desselben sich schneiden, sind gleich.

451. Wie folgt aus Aufg. 450 die Lösung der Aufgaben 444, 445?

452. Ein Punkt bewege sich so, dass die Produkte seiner senkrechten Entfernungen von den beiden Paaren der gegenüberliegenden Seiten eines Vierecks in einem bekannten Verhältniß sind; wenn ist der Ort dieses Punktes ein Kreis?

453. Es seien die Gleichungen von vier geraden Linien in der Normalform:

$x_1 \equiv x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - \delta_1 = 0$, $x_3 \equiv x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 - \delta_3 = 0$,
 $x_2 \equiv x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - \delta_2 = 0$, $x_4 \equiv x \cos \alpha_4 + y \sin \alpha_4 - \delta_4 = 0$,
 und $\alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_4 - \alpha_3$ gegeben; welche Kurve stellt die Gleichung $x_1 x_3 = \pm x_2 x_4$ dar?

454. Wie ändert sich Aufg. 453, wenn x_4 mit x_2 dieselbe Linie ist?

455. Wenn ist der Ort eines Punktes ein Kreis, für welchen die Summe der Quadrate der von ihm auf die Seiten eines Dreiecks gefällten Senkrechten konstant ist?

456. Die Gleichung des Kreises zu finden, welcher dem aus den geraden Linien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ gebildeten Dreieck umgeschrieben ist; oder die Gleichung des Kreises in Dreieckskoordinaten zu bestimmen, wenn das Fundamentaldreieck dem Kreise eingeschrieben ist (s. Aufg. 453).

457. Haben x_1 , x_2 , x_3 die Bedeutung wie in Aufg. 456 und liegen den Seiten x_1 , x_2 , x_3 die Winkel A_1 , A_2 , A_3 gegenüber, welche Kurve bestimmt die Gleichung

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = 0,$$

und die Gleichung

$$x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3 = c?$$

458. Welche Bedeutung hat die Gleichung

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) (x_3 \sin A_1 + x_2 \sin A_2 + x_1 \sin A_3) \\ + b (x_2 x_3 \sin A_1 + x_3 x_1 \sin A_2 + x_1 x_2 \sin A_3) = 0,$$

wenn die x und A wie in Aufg. 457 bestimmt sind?

459 Unter welcher Bedingung stellt die Gleichung

$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2 a_{23} x_2 x_3 + 2 a_{31} x_3 x_1 + 2 a_{12} x_1 x_2 = 0$
 in en Kreis dar, wenn die x die Bedeutung der Aufg. 457 haben?

460. Wie ist das Fundamentaldreieck, dessen Seiten die Gleichungen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ haben, beschaffen, wenn die Gleichung $x_1 x_3 - x_2^2 = 0$ einen Kreis darstellt (s. Aufg. 453)?

461. Die drei Mittelpunkte der Seiten und die drei Fusspunkte der Höhen in einem Dreieck liegen in demselben Kreise; es soll dessen Gleichung mit Hilfe von Dreieckskoordinaten bestimmt werden. Man bestimme die Entfernung zwischen den Mittelpunkten des eingeschriebenen und durch die Seitenmittelpunkte gehenden Kreises.

462. Die Gleichungen der Kreise zu bestimmen, welche die Seiten des Fundamentaldreiecks $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ berühren. Wie gross ist die Entfernung der Mittelpunkte des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises (s. Aufg. 453)?

463. Welche Relation gehen die Koeffizienten a ein, wenn die Gleichung

$a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 + a_3^2 x_3^2 - 2a_2 a_3 x_2 x_3 - 2a_3 a_1 x_3 x_1 - 2a_1 a_2 x_1 x_2 = 0$ einen Kreis darstellen soll (s. Aufg. 453)?

Die Kegelschnitte. Systeme von Kegelschnitten.

464. In wieviel Punkten schneidet eine gerade Linie den *Kegelschnitt*, dessen Gleichung in schief- oder rechtwinkligem Koordinatensystem

$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0$ ist?

465. Wieviel Kegelschnitte kann man durch fünf beliebige Punkte legen?

466. In welche Linien zerfällt der Kegelschnitt, wenn von fünf gegebenen Punkten drei in einer geraden Linie liegen?

467. Wie heisst die Gleichung des Kegelschnittes Aufgabe 464 in Polarkoordinaten?

468. Löse die Gleichung in Aufg. 464 nach y auf und diskutiere nach der Theorie der quadratischen Gleichungen die Wurzeln der Gleichung.

469. Transformiere die Gleichung in Aufg. 464 durch Parallelverschiebung der Koordinatenachsen; wie ändern sich die Konstanten in der Gleichung?

470. Verschiebe in Aufg. 469 die Koordinatenachsen so, dass jede gerade Linie, welche durch den neuen Anfangspunkt gezogen wird, die Kurve so schneidet, dass dieser Anfangspunkt in der Mitte der durch die Kurvenpunkte begrenzten Länge liegt. *Mittelpunkt des Kegelschnittes. Mittelpunktsleichung des Kegelschnittes.* Wieviel Mittelpunkte kann ein Kegelschnitt haben?

471. Ist die Transformation in Aufg. 470 immer möglich?

472. Wie bestimmt sich in Aufg. 470 der Mittelpunkt, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta \geq 0, \quad \alpha = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

ist? Der Mittelpunkt liegt im Unendlichen: *Parabel*.

473. Transformiere die Gleichung in Aufg. 464 zu neuen Axen, welche einen Winkel w einschliessen und mit den alten Axen denselben Ursprung haben; transformiere die Mittelpunkts Gleichung eines Kegelschnittes so, dass das Glied xy verschwindet, d. h. die Gleichung des Kegelschnittes laute $Ax^2 + By^2 + C = 0$.

474. Unter welchem Winkel schneiden sich die geraden Linien $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ und in welchen Punkten schneiden diese Linien den Kegelschnitt in Aufg. 464?

475. In welchen Punkten schneiden die geraden Linien, welche den Linien $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$ parallel sind, den Kegelschnitt in Aufg. 464?

476. Wie bestimmen in Aufg. 474 und 475 sich die Schnittpunkte, wenn ist:

- | | | | |
|----|-------------------------------|-----------------|---|
| 1) | $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ | <i>Ellipse</i> | } Kegelschnitte mit Mittelpunkt im Endlichen liegend. |
| 2) | $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ | <i>Hyperbel</i> | |
| 3) | $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ | <i>Parabel?</i> | |

477. Zeige, dass der geometrische Ort der Aufg. 157 eine Ellipse, der Aufg. 158 eine Hyperbel und der Aufg. 159 eine Parabel ist.

478. Unter welchen Bedingungen stellt die Gleichung in Aufg. 464 einen Punkt dar?

479. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung in Aufg. 464, wenn ist $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$ und $\Delta = 0$ (s. Aufg. 472)?

480. Bestimme in Aufg. 464 die Koeffizienten a_{11} etc. so, dass die Gleichung eine doppelte Gerade darstellt.

481. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung in Aufg. 464, wenn ist:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \Delta = 0, \quad a_{11} < 0, \quad a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0;$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \Delta = 0, \quad a_{22} \geq 0, \quad a_{22}a_{33} - a_{23}^2 = 0?$$

(S. Aufg. 472.)

482. Unter welchen Bedingungen stellt die Gleichung in Aufg. 464 zwei Parallelen dar?

483. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung in Aufg. 464, wenn ist:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \Delta = 0, \quad a_{11} \geq 0, \quad a_{11} a_{33} - a_{13}^2 < 0;$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \Delta = 0, \quad a_{22} \geq 0, \quad a_{22} a_{33} - a_{23}^2 < 0?$$

(S. Aufg. 472.)

484. Wiederhole Aufgabe 301.

485. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung in Aufg. 464, wenn ist $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$ und $\Delta = 0$ (s. Aufg. 472)?

486. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung in Aufg. 464, wenn ist:

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad \Delta \geq 0, \quad \frac{\Delta}{a_{11}} > 0;$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \Delta = 0, \quad a_{11} \geq 0, \quad a_{11} a_{33} - a_{13}^2 > 0;$$

$$a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad \Delta = 0, \quad a_{22} \geq 0, \quad a_{22} a_{33} - a_{23}^2 > 0?$$

(S. Aufg. 472.)

487. Konstruiere und bestimme die Kurven:

1) $x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x - 2y + 21 = 0,$

2) $5x^2 + 12xy + 9y^2 - 5x - 6y - 19 = 0,$

3) $3x^2 + 3xy + y^2 - 2x - 5y - 7 = 0,$

4) $3x^2 + 6xy + 3y^2 + 5y - 4x + 7 = 0,$

5) $6x^2 + 5y^2 - 30 = 0,$

14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

6) $4x^2 - 2y^2 + 1 = 0,$

7) $x = 5y^2,$

15) $x^2 = py,$

8) $y = 4x^2,$

16) $y^2 = px,$

9) $xy = 1,$

17) $3x^2 - 5y^2 = 15,$

10) $x^2 - y^2 = 1,$

18) $5x^2 + 4y^2 = 20,$

11) $y^2 - x^2 = 1,$

19) $2x^2 + 4y^2 = 1,$

12) $x^2 + xy = 5,$

20) $9x^2 - 4y^2 - 9 = 27,$

13) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$

21) $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 4y^2,$

22) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{4}y^2,$

23) $(x + 5)^2 + (y - 6)^2 = x^2,$

- 24) $4x^2 + 5y^2 + 40x - 8y + 101 = 0,$
- 25) $4x^2 + 5y^2 - 8x + 8y + 17 = 0,$
- 26) $16x^2 + 20y^2 - 16x + 16y - 17 = 0,$
- 27) $9x^2 - 9y^2 + 5x - 10 = 0,$
- 28) $x^2 + y^2 - 12x + 10y - 11 = (x - 1)^2 - 1 + 2x,$
- 29) $x^2 + 16y - 18x + 145 = 0,$
- 30) $x^2 + 15y - 3x + 10 = 0,$
- 31) $x^2 - 8y^2 + 16y - 18x + 145 = 0,$
- 32) $10x^2 + 25y^2 - 24x + 24y + 34 = 0.$

In welchen Punkten schneiden sich je zwei dieser Kurven?

488. Welche Kurve stellt die Gleichung in Aufgabe 464 dar, wenn $a_{12} = 0$ und wenn 1. $a_{11} a_{22}$ positiv und 2. $a_{11} a_{22}$ negativ ist?

489. Welche Kurve stellt die Gleichung in Aufgabe 464 dar, wenn 1. $a_{11} = 0$, 2. $a_{22} = 0$, 3. $a_{11} = a_{22}$?

490. Den Punkt zu bestimmen, der alle Sehnen des Kegelschnittes halbiert (Mittelpunkt des Kegelschnittes, s. Aufgaben 478—482).

491. Den Ort der Mittelpunkte der Sehnen zu finden, welche bei einem Kegelschnitte einer gegebenen geraden Linie parallel sind. *Durchmesser des Kegelschnittes.*

492. Alle Durchmesser der Parabel sind parallel.

493. Die Durchmesser der Parabel haben dieselbe Richtung wie die geraden Linien durch den Anfangspunkt der Koordinaten, welche die Kurve in unendlich weiter Entfernung schneiden. (Siehe Aufg. 480, 484, 485.)

494. Liegen zwei Durchmesser eines Kegelschnittes so, dass einer von ihnen alle zu den anderen parallele Sehnen halbiert, so halbiert auch der zweite alle Sehnen, welche dem ersten parallel sind. Diese Durchmesser heissen *konjugierte Durchmesser*.

495. Bestimme den Winkel zweier konjugierten Durchmesser.

496. Wieviel Durchmesser, die zu einander konjugiert sind, giebt es, welche senkrecht auf einander sind? *Axen des Kegelschnittes*, deren Schnittpunkte mit dem Kegelschnitt *Scheitel des Kegelschnittes* heissen. Welche Form muss die Gleichung 464 haben, wenn die Koordinatenachsen den Axen des Kegelschnittes parallel sind?

497. Die Axen halbieren die Winkel zwischen den beiden Durchmessern, welche den geraden Linien

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

parallel laufen, wenn die Gleichung des Kegelschnittes diese in Aufg. 464 ist; diese Durchmesser heissen *Asymptoten des Kegelschnittes*.

498. Es ist zu beweisen, dass die Asymptoten nur bei der Hyperbel reell sind und diese Kurve in unendlicher Entfernung in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, oder die Asymptoten sind Tangenten an die Hyperbel im unendlich fernen Punkte.

499. Eine gerade Linie, welche zwei unendlich nahe Punkte mit der Kurve gemein hat, heisst *Tangente* der Kurve und die beiden zusammenfallenden Punkte der *Berührungspunkt*. Es soll die Gleichung der Tangente in einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes bestimmt werden. Bestimme die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers in Bezug auf den konjugierten Durchmesser.

500. Von einem gegebenen Punkte aus ziehe man Tangenten an einen Kegelschnitt; es seien die Berührungspunkte und die Gleichungen der Tangenten zu bestimmen. Welche Eigenschaft hat die Verbindungslinie der Berührungspunkte, wenn die Tangenten parallel laufen?

501. Wieviel Tangenten kann man von einem Punkte aus an einen Kegelschnitt legen? Die Bedingung zu finden, unter der die gerade Linie $mx + ny = 1$ den Kegelschnitt berührt.

502. Zwei Punkte heissen *harmonische Pole des Kegelschnittes*, wenn ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, die zu den beiden Punkten harmonisch sind. Es soll der geometrische Ort, die *Polare*, des einem gegebenen Punkte zugeordneten harmonischen Poles in Bezug

auf einen Kegelschnitt bestimmt werden oder auch der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes auf den durch den gegebenen Punkt gehenden Strahlen in Bezug auf einen Kegelschnitt gefunden werden.

503. Die Polaren aller Punkte auf einer geraden Linie in Bezug auf einen Kegelschnitt schneiden sich in dem Pole der geraden Linie.

504. Wenn eine gerade Linie sich um einen Punkt in ihr dreht, so beschreibt der Pol in Bezug auf einen Kegelschnitt die Polare des Drehpunktes.

505. Wenn der Pol auf dem Kegelschnitte selbst liegt, so ist seine Polare Tangente des Kegelschnittes für den Pol, und der Pol der Tangente eines Kegelschnittes ist ihr Berührungspunkt.

506. Zu welcher geraden Linie oder Polaren ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes Pol? Welchen Punkt hat der Durchmesser des Kegelschnittes zum Pol?

507. Wenn zwei aus einem Punkte O gezogene gerade Linien einen Kegelschnitt je in zwei Punkten treffen, so liegen die Durchschnittspunkte M und N der beiden anderen Paare von geraden Linien, welche diese Durchschnitte verbinden, in der Polare von O . Konstruktion der Polaren mittelst gerader Linien.

508. Wie folgt aus 507 der Satz: Wenn durch einen Punkt O eine gerade Linie OL gezogen wird, so schneiden sich die Tangenten der Kurve in den Punkten L_1 und L_2 der geraden Linie OL in der Polaren von O ?

509. Beweise mit Hilfe der Polaren, dass jedes einem Kegelschnitte einbeschriebene Sechseck ein Pascalsches Sechseck ist.

510. Beweise mit Hilfe der Polaren, dass jedes einem Kegelschnitte umschriebene Sechseck ein Brianchonsches Sechseck ist.

511. Fünf Punkte eines Kegelschnittes sind gegeben, mit Hilfe der Aufg. 59 den Kegelschnitt Punkt für Punkt zu konstruieren.

512. Durch wieviel Tangenten an einem Kegelschnitt ist dieser Kegelschnitt bestimmt?

513. In welche Punkte zerfällt ein Kegelschnitt, wenn von fünf Tangenten an ihn drei durch denselben Punkt gehen?

514. Fünf Tangenten eines Kegelschnittes sind gegeben, mit Hilfe von Aufg. 510 die Punkte des Kegelschnittes zu konstruieren.

515. *Harmonische Polaren* eines Kegelschnittes nennt man zwei gerade Linien, welche zu den zwei Tangenten harmonisch sind, welche von dem Schnittpunkte der geraden Linien an den Kegelschnitt gelegt werden können. Die Polaren von zwei harmonischen Polen eines Kegelschnittes sind harmonische Polaren.

516. Die Pole von zwei harmonischen Polaren eines Kegelschnittes sind harmonische Pole.

517. Das anharmonische Verhältniß von zwei Linienpaaren, welche denselben Punkt gemein haben, ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse ihrer Polepaare in Bezug auf einen Kegelschnitt.

518. Das anharmonische Verhältniß von zwei Punktepaaren auf einer geraden Linie ist gleich dem anharmonischen Verhältniß ihrer Polarenpaare in Bezug auf einen Kegelschnitt.

519. Die Pole von zwei harmonischen Linienpaaren sind harmonische Punktepaare in Bezug auf einen Kegelschnitt.

520. Die Polaren von zwei harmonischen Punktepaaren sind harmonische Linienpaare.

521. Die Pole von drei Linienpaaren der Involution in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden eine Involution.

522. Die Polaren von drei Linienpaaren der Involution in Bezug auf einen Kegelschnitt bilden eine Involution.

523. Wenn der Pol in Bezug auf einen Kegelschnitt einen Kegelschnitt beschreibt, so bewegt sich seine Polare als Tangente um einen zweiten Kegelschnitt; diese Kegelschnitte heißen *reciproke Polaren*.

524. Wenn eine gerade Linie sich als Tangente um einen Kegelschnitt bewegt, so beschreibt ihr Pol einen zweiten Kegelschnitt.

525. Zieht man durch zwei feste Punkte O und O_1 zwei Parallele, welche den Kegelschnitt in den Punkten R' , R'' und R'_1 , R''_1 schneiden, so ist das Verhältniß

$$OR' \cdot OR'' : O_1 R'_1 \cdot O_1 R''_1$$

immer dasselbe, wie auch die Richtung der Linien sei.

526. Wie heisst der Satz 525, wenn O_1 mit dem Mittelpunkt der Kurve zusammenfällt?

527. Wie lautet der Satz 525, wenn OR eine Tangente an dem Kegelschnitt ist?

528. Wie ändert sich der Satz 525, wenn OO_1 ein Durchmesser des Kegelschnittes ist und $OR' = OR''$, $O_1 R'_1 = O_1 R''_1$?

529. Wie folgt aus Satz 525 folgendes Theorem: Wenn in einer Parabel eine gerade Linie irgend einen Durchmesser schneidet, so ist das Produkt der in der geraden Linie bestimmten Segmente zu dem durch sie im Durchmesser gebildeten Abschnitt in konstantem Verhältniss, solange die gerade Linie dieselbe Richtung behält?

530. Wie folgt aus 525 folgender Satz: Die durch zwei parallele Sehnen einer Hyperbel in einer zu einer Asymptote gehörigen Parallelen gebildeten Abschnitte stehen im Verhältniss mit den Rechtecken unter den Segmenten der Sehnen?

531. Der Punkt $(3, 2)$ liegt in der Kurve

$$x^2 - 8xy + y^2 + 5x + 7y + 6 = 0;$$

transformiere die Gleichung zu parallelen Axen durch $(3, 2)$ und bestimme die Gleichung der Tangente in $(3, 2)$.

532. Die Punkte $(3, 2)$ und $(-x, -3 + \sqrt{7})$ liegen auf dem Kegelschnitt $x^2 - 8xy + y^2 + 5x + 7y + 6 = 0$; es soll die Gleichung der Verbindungslinie der Punkte und die Länge der Sehne bestimmt werden. Bestimme den Pol dieser Sehne.

533. Bestimme die Tangente in $(1, 2)$ zu dem Kegelschnitt

$$5x^2 + 4xy + 3y^2 - 8x - 7y - 3 = 0.$$

Suche die Axen, den Mittelpunkt und den Durchmesser, welcher der Tangente in $(1, 2)$ parallel ist.

534. Die Gleichung einer Tangente an den Kegelschnitt

$$2x^2 - 4xy + 3y^2 + 7y - 5x - 3 = 0$$

ist

$$9y - 5x = 4;$$

bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes. Bestimme die Asymptoten und die Axen, den Mittelpunkt, den Durchmesser parallel zur Tangente.

535. Die Gleichung einer Tangente an den Kegelschnitt

$$4x^2 + y^2 = 4$$

ist

$$x + \frac{y}{2} = 1;$$

bestimme die Koordinaten des Berührungspunktes. Suche den zur Tangente parallelen Durchmesser und den zu ihm konjugierten Durchmesser.

536. Bestimme die Gleichung der Tangenten an die Kegelschnitte:

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

$$3) \quad y^2 = mx;$$

$$4) \quad xy = n^2;$$

$$5) \quad x^2 - y^2 = 1;$$

wenn sie durch den Punkt $x'y'$ gehen.

537. Von dem Punkte $(2, \frac{14}{5})$ die Tangenten an die Kurve

$$3x^2 - 4xy + 2y^2 + 7x - 5y - 3 = 0$$

zu bestimmen. Bestimme den Mittelpunkt und die beiden Axen. Wie heisst die Gleichung der Polaren zu dem Pol $(2, \frac{14}{5})$?

538. Bestimme die Gleichung der Tangente an den Kegelschnitt

$$3x^2 + 4xy + 5y^2 - 7x - 8y - 3 = 0$$

vom Punkte $(3, \frac{1}{10})$ aus. Bestimme den Mittelpunkt und den konjugierten Durchmesser zu dem Durchmesser, welcher durch den Punkt $(3, \frac{1}{10})$ geht.

539. Bestimme die Polare des Punktes $(1, 1)$ in Bezug auf den Kegelschnitt

$$x^2 + xy + 27y^2 - 6x + 3y - 26 = 0.$$

Wie heisst die Gleichung der Tangente durch den Punkt $(1, 1)$ an den Kegelschnitt?

540. Bestimme die Polare des Punktes $(2, 1)$ in Bezug auf den Kegelschnitt $9x^2 + \frac{1}{3}xy + \frac{1}{3}y^2 + y - 2x + \frac{1}{3} = 9$.

541. Bestimme die Polare des Punktes (5, 6) in Bezug auf jeden der Kegelschnitte 539 und 540. Suche die Axen dieser Kegelschnitte.

542. Bestimme die Polare des Punktes x', y' in Bezug auf den Kegelschnitt: 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y^2 = px$. Bestimme die Axen dieser Kegelschnitte, den zu der geraden Linie $mx + ny = 0$ konjugierten Durchmesser und den Winkel dieser Durchmesser.

543. Bestimme den Pol der durch die Punkte (x', y') und (x'', y'') gehenden geraden Linie in Beziehung auf den Kegelschnitt: 1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; 3) $y^2 = px$. Setze in dieser Aufg. und in Aufg. 542:

$$\left. \begin{array}{l} a = 3, 5, 7, 11, 9, 8 \\ b = 2, 1, 4, 3, 6, 8 \end{array} \right\} = p;$$

$$\begin{aligned} (x', y') &= (1, 3), (2, 4), (5, 7), (9, 11), (3, 5), (2, 0); \\ (x'', y'') &= (0, 0), (9, 1), (2, 3), (4, 7), (6, 10), (0, 2). \end{aligned}$$

544. Aus fünf Punkten eines Kegelschnittes seinen Mittelpunkt zu konstruieren nach Satz 509, ebenso aus fünf Tangenten, nach Satz 510.

545. Mit Hilfe von Satz 509 zu beweisen: Wenn vier Punkte A, B, C, D eines Kegelschnittes und zwei Gerade AF, ED so gegeben sind, dass F und E mit $ABCD$ auf einem Kegelschnitte liegen, so geht die gerade Linie CF durch einen festen Punkt oder: Wenn vier Punkte eines Kegelschnittes gegeben sind, so geht dessen Sehne mit einem festen, durch zwei von diesen Punkten gehenden Kegelschnitt durch einen festen Punkt.

546. Wie heisst das Theorem 545, wenn ein Kegelschnitt zu einem Paar gerader Linien wird?

547. Wie heisst Satz 509 und 510, wenn das Sechseck resp. Sechseit zu einem Fünfeck, Viereck, Dreieck wird?

548. Konstruiere an einem Kegelschnitt mit Hilfe der Polaren mittelst eines Lineals die Tangenten aus einem beliebigen Punkt der Ebene.

549. Diskutiere die Eigenschaften des einem Kegelschnitte ein- oder umschriebenen Vierecks in betreff der Pole und Polaren der auftretenden Punkte und Linien.

550. Die Bedingung zu finden, unter der die gerade Linie $ux + vy + w = 0$ den durch die Gleichung Aufg. 464 dargestellten Kegelschnitt berührt oder die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten u, v, w aufzustellen, wenn die gerade Linie u, v, w den Kegelschnitt einhüllt. Der Kegelschnitt ist die *Envelope* der geraden Linie u, v, w (s. Aufg. 228).

551. Wie bestimmen die Koeffizienten A der allgemeinen Gleichung zweiten Grades in Linienkoordinaten

$$A_{11}u^2 + A_{22}v^2 + A_{33}w^2 + 2A_{23}vw + 2A_{13}uw + 2A_{12}uv = 0$$

sich durch die Koeffizienten a der allgemeinen Gleichung in Punktkoordinaten

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} + 2a_{23}y + 2a_{13}x + 2a_{12}xy = 0,$$

wenn die Gerade u, v, w den Kegelschnitt berühren soll (siehe Aufg. 228)?

552. Die Gleichung des Tangentenpaares zu bestimmen, welches von einem gegebenen Punkte $au + bv + cw = 0$ an den Kegelschnitt Aufg. 551 gezogen werden kann.

553. Es sei die Gleichung des Poles der durch ihre Koordinaten u_0, v_0, w_0 gegebenen geraden Linie in Bezug auf den Kegelschnitt Aufg. 551 zu bestimmen.

554. Beweise mit Hilfe der Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten die Sätze 503—530.

555. Die gerade Linie $(2, 3, 1)$ berührt den Kegelschnitt

$$u^2 + v^2 - 6w^2 - 6uv + 5vw + 7uw = 0;$$

bestimme die Gleichung des Berührungspunktes.

556. Die Gleichung eines Kegelschnittes ist

$$2u^2 - 4uv + 3v^2 - 3w^2 + 7uw - 5vw = 0$$

und die Gleichung eines Punktes $9u - 5v - 4w = 0$; bestimme die Koordinaten der geraden Linie, welche durch diesen Punkt geht und den Kegelschnitt berührt.

557. Bestimme den Pol der geraden Linie $(1, 1, 1)$ in Bezug auf den Kegelschnitt

$$u^2 + 27v^2 - 26w^2 + uv - 6uw + 3wv = 0.$$

558. Bestimme die Polare des Schnittpunktes der geraden Linien (u', v', w') und (u'', v'', w'') in Beziehung auf den Kegelschnitt:

$$(u^2 e^2 - w^2) + (a^2 - e^2)(u^2 + v^2) = 0.$$

559. Bestimme die Polare des Schnittpunktes der geraden Linien (u', v', w') und (u'', v'', w'') in Bezug auf die Kurve

$$v^2 - \frac{2}{p} uv = 0.$$

560. Transformiere die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten auf den Mittelpunkt durch Parallelverschiebung der Koordinatenachsen.

561. Transformiere die Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten durch Drehung des Koordinatensystems.

562. Vereinige die Transformation in 560 und 561 mit beliebiger Aufeinanderfolge.

563. Welche Relationen gehen die Koeffizienten in der Gleichung des Kegelschnittes in Linienkoordinaten ein, wenn der Kegelschnitt ist: 1. eine Ellipse, 2. eine Hyperbel, 3. eine Parabel?

564. Welchen Kegelschnitt stellt die resp. Gleichung der Aufg. 555, 556, 557, 559 dar?

Die Gleichung des Kegelschnittes zu bestimmen, von dem gegeben sind:

565. die Koordinaten von fünf Punkten;

566. die Koordinaten von vier Punkten und die Gleichung einer Tangente;

567. die Koordinaten von drei Punkten und die Gleichungen von zwei Tangenten;

568. die Koordinaten von zwei Punkten und die Gleichungen von drei Tangenten;

569. die Koordinaten von einem Punkte und die Gleichungen von vier Tangenten;

570. die Gleichungen von fünf Tangenten;

571. die Gleichungen von drei Tangenten und die Koordinaten des Berührungspunktes auf zwei derselben;

572. die Gleichungen von zwei Tangenten und die Koordinaten von deren Berührungspunkte und eines ausser ihnen befindlichen Punktes;

573. die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes und die Koordinaten von drei Punkten;

574. die Koordinaten von vier Punkten und die Gleichung einer geraden Linie, welcher einer Asymptote des Kegelschnittes parallel ist;

575. die Koordinaten von drei Punkten und die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten des Kegelschnittes parallel sind;

576. die Koordinaten von drei Punkten und die Gleichung einer Asymptote;

577. die Koordinaten eines Punktes und die Gleichungen von den zwei Asymptoten;

578. die Gleichungen von vier Tangenten und die Koordinaten eines Berührungspunktes auf einer derselben;

579. die Gleichungen von vier Tangenten und die Gleichung einer geraden Linie, welcher einer Asymptote parallel ist;

580. die Gleichungen von drei Tangenten und die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten parallel sind;

581. die Gleichungen von drei Tangenten und die Gleichung einer Asymptote;

582. die Gleichung von einer Tangente und die Gleichungen von zwei Asymptoten;

583. die Koordinaten von zwei Punkten, die Gleichung einer Asymptote und die Gleichung einer geraden Linie, welche der andern Asymptote parallel ist;

584. die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes, die Gleichung einer Asymptote und die Gleichung einer geraden Linie, welche der andern Asymptote parallel ist.

585. die Koordinaten von drei Punkten, die Gleichung einer Tangente, die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptote parallel ist;

586. die Koordinaten von zwei Punkten, die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes, die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptote parallel ist;

587. die Koordinaten von zwei Punkten, die Gleichungen von zwei Tangenten, die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptote parallel ist;

588. die Koordinaten eines Punktes, die Gleichungen von drei Tangenten, die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptote parallel ist;

589. die Koordinaten eines Punktes, die Gleichungen von zwei Tangenten, die Koordinaten eines Berührungspunktes, die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptote parallel ist;

590. die Koordinaten eines Punktes, die Gleichungen von zwei Tangenten, die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten parallel sind;

591. die Koordinaten von zwei Punkten, die Gleichung einer Tangente, die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten parallel sind;

592. die Koordinaten eines Punktes, die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes, die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten parallel sind;

593. die Koordinaten von zwei Punkten, die Gleichung einer Tangente, die Gleichung einer Asymptote;

594. die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichungen von zwei Tangenten und einer Asymptote;

595. die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes und die Gleichung einer Asymptote;

596. die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichung einer Tangente, die Gleichung einer Asymptote und die Gleichung einer geraden Linie, welche der anderen Asymptote parallel ist;

597. die Gleichungen von zwei Tangenten, die Gleichung einer Asymptote und die Gleichung einer geraden Linie, welche der andern Asymptote parallel ist;

598. die Koordinaten des Mittelpunktes und die Koordinaten von drei Punkten;

599. die Koordinaten des Mittelpunktes und die Gleichungen von drei Tangenten;

600. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten von zwei Punkten und die Gleichung einer Tangente;

601. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichungen von zwei Tangenten;

602. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichung einer Tangente und die Koordinaten des Berührungspunktes;

603. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Gleichungen von zwei Tangenten und die Koordinaten eines Berührungspunktes;

604. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten von zwei Punkten und die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

605. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten eines Punktes, die Gleichung einer Tangente und die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

606. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Gleichungen von zwei Tangenten, die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

607. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes, die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

608. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten eines Punktes und die Gleichungen von zwei geraden Linien welche der Asymptoten parallel sind;

609. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Gleichung einer Tangente und die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche der Asymptoten parallel sind;

610. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Koordinaten eines Punktes und die Gleichung einer Asymptote;

611. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Gleichung einer Tangente und die Gleichung einer Asymptote;

612. die Koordinaten des Mittelpunktes, die Gleichung einer Asymptote und die Gleichung einer geraden Linie, welche der andern Asymptote parallel ist;

613. die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche Durchmesser des Kegelschnittes sind und in den Aufg. 597 bis 612 an die Stelle der Koordinaten des Mittelpunktes treten sollen.

614. Wie lauten die Aufg. 565—613, wenn an Stelle der „Koordinaten eines Punktes“ oder der „Gleichung einer Tangente“ die „Gleichung eines Durchmessers“ tritt; wenn an Stelle der „Koordinaten des Mittelpunktes“ die „Gleichung eines Durchmessers“ und die „Gleichung einer geraden Linie, welche dem zu dem gegebenen Durchmesser konjugierten Durchmesser parallel ist“ tritt; wenn statt des „Mittelpunktes“ eine „Axe“ genommen wird?

615. Wieviel gerade Linien oder Punkte müssen noch gegeben sein, damit ein Kegelschnitt bestimmt ist, wenn man zwei Sehnen kennt, welche zwei konjugierten Durchmessern parallel sind?

616. Konstruiere die Aufg. 566—614 mittelst des Satzes von Pascal und Brianchon.

617. Wie heissen die Aufg. 566—614, wenn statt der Punktkoordinaten die Linienkoordinaten genommen werden?

618. Man soll für einen durch die allgemeine Gleichung gegebenen Kegelschnitt die Bedingung bestimmen, unter welcher der Pol der einen Koordinatenaxe auf der andern Koordinatenaxe liegt?

619. Wie sind die Koeffizienten der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte beschaffen, damit eine Asymptote durch den Koordinatenanfang geht?

620. Wenn in der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte $a_{13}^2 = a_{11} a_{33}$ ist und man auf einer Tangente dieses Kegelschnittes zwei Punkte A und B so annimmt, dass die Länge AB unveränderlich ist, welches ist der Ort des Durchschnittspunktes der von A und B an den Kegelschnitt gelegten Tangenten?

621. Bestimme den Ort des Mittelpunktes eines Kegelschnittes, der durch vier gegebene Punkte geht.

622. Bestimme den Ort des Mittelpunktes eines Kegelschnitts, der vier gegebene gerade Linien zu Tangenten hat.

623. Wenn die Axen den Kegelschnitt in A_1B und A'_1B' treffen und die Summe der Quadrate der Axen ($AB^2 + A'B'^2$) konstant ist und drei Tangenten gegeben sind, welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt des Kegelschnittes?

624. Es seien zwei Kegelschnitte K und K' gegeben; eine gerade Linie parallel einer gegebenen geraden Linie L schneide K in den Punkten A, B und K' in den Punkten A', B' ; welchen Ort beschreibt ein Punkt P , welcher durch die Punkte A und B von einem der Punkte A', B' harmonisch getrennt wird?

625. Unter welchen Bedingungen ist der Ort der Aufgabe 624 ein Kegelschnitt?

626. Den Ort von P in Aufg. 624 zu bestimmen, wenn K und K' gerade Linien werden.

627. Den Ort P in Aufg. 624 zu bestimmen, wenn K zwei sich schneidende Geraden und K' eine Doppelgerade darstellt.

628. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 624 der Punkt P , wenn die geraden Linien AB , auf denen er liegt, durch einen festen Punkt gehen?

629. Unter welcher Bedingung ist der Ort P in Aufgabe 628 ein Kegelschnitt?

630. Den Ort P der Aufg. 628 zu finden, wenn die Kegelschnitte in gerade Linien zerfallen, welche denselben Punkt gemein haben.

631. Den Ort eines Kreismittelpunktes zu finden, der durch einen gegebenen Punkt geht und in einer geraden Linie gleiche Sehnen abschneidet.

632. Ein Dreieck ABC ist einem Kegelschnitte umschrieben, der Winkel an A ist gegeben, B bewegt sich auf einer geraden Linie; es sei der Ort von C zu finden.

633. Ein Dreieck ABC ist einem Kegelschnitt eingeschrieben, der Winkel an A ist gegeben, die Linie AB geht durch einen festen Punkt; es sei die Enveloppe der Linie AC zu bestimmen.

634. In einem gegebenen Kreise ziehe man durch die Endpunkte einer Sehne von konstanter Länge Parallelen zu zwei festen geraden Linien; welchen Ort beschreibt der Durchschnittspunkt dieser geraden Linien?

635. Von den parallelen Seiten eines Trapezes ist die eine der Grösse und Lage, die andere der Grösse nach gegeben, die Summe der nicht parallelen Seiten ist konstant; welchen Ort beschreibt der Diagonalendurchschnitt?

636. Die Seiten eines Dreiecks drehen sich um feste Punkte a, b, c ; die Endpunkte der um c sich drehenden Seiten liegen auf einem die Punkte a und b enthaltenden Kegelschnitt, welchen Ort beschreibt die freie Ecke P .

637. Die Ecken eines Dreiecks abc bewegen sich in drei geraden Linien A, B, C ; die Geraden A, B und ac, cb berühren denselben Kegelschnitt; es ist die Enveloppe von ab zu bestimmen.

638. Die Ecken eines Dreiecks abc bewegen sich in drei geraden Linien und zwei seiner Seiten gehen durch zwei feste Punkte; es sei die Enveloppe der dritten Seite zu bestimmen. Wie folgt die Lösung dieser Aufgabe aus 637?

639. Es sei die Enveloppe einer geraden Linie zu bestimmen, für welche das Produkt ihrer Perpendikel von zwei festen Punkten konstant ist.

640. Es sei die Enveloppe einer geraden Linie zu finden, für welche die Summe der Quadrate ihrer Perpendikel von zwei festen Punkten konstant ist.

641. Es sei die Enveloppe einer geraden Linie zu suchen, für welche die Differenz der Quadrate ihrer Perpendikel von zwei festen Punkten konstant ist.

642. Eine gerade Linie OP dreht sich um einen festen Punkt O und schneidet eine feste gerade Linie in R ; welche Kurve hüllt die gerade Linie RR ein, wenn diese gerade Linie mit der festen geraden Linie einen konstanten Winkel einschliesst?

643. Den Ort eines Punktes zu bestimmen, dessen Entfernung von einem festen Punkte, dem *Brennpunkte*, zu seiner

Entfernung von einer festen geraden Linie, der *Direktrix*, in einem konstanten Verhältnisse steht.

644. Bestimme die Polare eines Brennpunktes in Bezug auf einen gegebenen Kegelschnitt.

645. Bestimme den Pol der Direktrix in Bezug auf einen Kegelschnitt.

646. Wie muss das Verhältniss der „*Excentricität der Kurve*“ beschaffen sein, damit der Kegelschnitt eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist?

647. Wie heisst die Gleichung des Kegelschnittes, wenn die Direktrix die eine Koordinatenaxe und die durch den Brennpunkt gehende Senkrechte auf sie die andere Koordinatenaxe ist und der Brennpunkt die Koordinaten x', y' hat?

648. Wie folgt aus der Gleichung der Aufg. 647, dass Ellipse und Hyperbel zwei reelle Brennpunkte haben? Parallelverschiebung der Koordinaten.

649. Auf welchem Durchmesser liegen die Brennpunkte und welche Lage haben sie gegen den Mittelpunkt des Kegelschnitts?

650. Zeige, dass in den Aufg. 157, 158, 159 die fest gegebenen Punkte die Brennpunkte sind und bestimme in diesen Aufgaben die Direktrixen.

651. Zeige und beweise, dass der Kegelschnitt in Bezug auf die Verbindungslinie der Brennpunkte symmetrisch liegt.

652. Wie gross ist die Entfernung der Brennpunkte eines Kegelschnittes, wenn dessen Excentricität gleich e ist?

653. Wie gross ist die Sehne durch die Brennpunkte zwischen den Schnittpunkten mit dem Kegelschnitt?

654. Eine gerade Linie schneidet den Kegelschnitt in den Punkten MN ; wie gross ist der Winkel MFN , wenn F ein Brennpunkt ist?

655. Eine gerade Linie schneidet den Kegelschnitt in den Punkten M, N und hat in Bezug auf den Kegelschnitt den Punkt P zum Pol, wie gross ist der Winkel MFP oder NFP , wenn F ein Brennpunkt ist?

656. Bestimme den Winkel zwischen der Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Pol einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne und dieser Sehne.

657. Bestimme den Winkel zwischen der Verbindungslinie eines Brennpunktes mit dem Berührungspunkt einer Tangente und dieser Tangente. Wie folgt die Lösung dieser Aufgabe aus Satz 656?

658. Eine Tangente berührt den Kegelschnitt im Punkte B und schneidet die Direktrix im Punkte M ; wie gross ist der Winkel BFM , wenn F der Brennpunkt ist?

659. Bestimme in Aufg. 658 die Entfernung des Brennpunktes von der Tangente.

Die Gleichung des Orts der Aufg. 643 zu bestimmen, wenn von ihm gegeben sind:

660. die Koordinaten des Brennpunktes und die Koordinaten von drei Punkten;

661. die Koordinaten des Brennpunktes und die Gleichungen von drei Tangenten;

662. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten von zwei Punkten und die Gleichung einer Tangente;

663. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichungen von zwei Tangenten;

664. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten von einem Punkte, die Gleichung einer Tangente und die Koordinaten des Berührungspunktes;

665. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichungen von zwei Tangenten und die Koordinaten eines Berührungspunktes;

666. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten von zwei Punkten und die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

667. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten eines Punktes, die Gleichung einer Tangente und die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote.

668. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichungen von zwei Tangenten, die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

669. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung einer Tangente, die Koordinaten des Berührungspunktes, die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

670. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten eines Punktes und die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten parallel sind;

671. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung einer Tangente und die Gleichungen von zwei geraden Linien, welche den Asymptoten parallel sind;

672. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung einer Tangente und die Gleichung einer Asymptote;

673. die Koordinaten des Brennpunktes, die Koordinaten eines Punktes und die Gleichung einer Asymptote;

674. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung einer Asymptote und die Gleichung einer geraden Linie, welche der anderen Asymptote parallel ist;

675. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung der Direktrix und die Koordinaten eines Punktes;

676. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung der Direktrix und die Gleichung einer Tangente;

677. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung der Direktrix und die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptote parallel geht;

678. die Koordinaten des Brennpunktes, des Mittelpunktes und eines Punktes;

679. die Koordinaten des Brennpunktes, des Mittelpunktes und die Gleichung einer Tangente;

680. die Koordinaten des Brennpunktes, des Mittelpunktes und die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

681. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung der Axen und die Koordinaten eines Punktes;

682. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung der Axe und die Gleichung einer Tangente;

683. die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung der Axe, die Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptote;

684. die Koordinaten eines Brennpunktes und in den Aufgaben 678—681 an Stelle „des Mittelpunktes“ der „andere Brennpunkt“.

685. Wie lauten die Aufg. 660—685, wenn an Stelle der „Koordinaten eines Punktes“ oder der „Gleichung einer Tangente“ die Gleichung eines Durchmessers tritt?

686. Wie heissen die Aufg. 660—685, wenn an Stelle der „Koordinaten des Mittelpunktes“ die „Gleichung eines Durchmessers A und die Gleichung einer geraden Linie, welche dem zu A konjugierten Durchmesser parallel ist“, tritt?

687. Wie ändern sich die Aufg. 566—614, wenn man statt einer „Asymptoten“ einen „Brennpunkt“ nimmt?

688. Löse die Aufg. 566—614 und 660—685, wenn man statt einer „Tangente mit Berührungspunkt“ eine „Polare mit ihrem Pole“ giebt.

689. Löse die Aufg. 566—614, wenn man statt einer „Asymptote“ die „Direktrix“ einführt.

690. Löse die Aufg. 566—614, wenn man „die Gleichung einer geraden Linie parallel der Direktrix“ an die Stelle von „den Koordinaten eines Punktes“ oder „der Gleichung einer Tangente“ oder der „Gleichung einer geraden Linie parallel einer Asymptoten“ setzt.

691. Löse die Aufg. 566—614 und 660—685, wenn man „die Gleichung einer geraden Linie und die Koordinaten eines Punktes, welcher in Bezug auf den Kegelschnitt der Pol der geraden Linie sein soll“ an die Stelle von „den Koordinaten zweier Punkte“ oder „den Gleichungen von zwei Tangenten“ oder „den Koordinaten des Mittelpunktes“, „den Koordinaten eines Brennpunktes“ oder „der Gleichung einer Direktrix“ oder „der Gleichung einer Asymptoten“ oder „den Gleichungen zweier Durchmesser“ oder „der Gleichung eines Durchmessers A und der Gleichung einer geraden Linie, welche dem zu A konjugierten Durchmesser parallel ist“, setzt.

692. Kann man den Kegelschnitt bestimmen, wenn von ihm gegeben sind: die Koordinaten des Brennpunktes, die Gleichung einer Tangente und die Koordinaten des Berührungspunktes?

693. Ist der Kegelschnitt zu konstruieren, von dem gegeben ist: der Mittelpunkt, die Gleichung einer Tangente und die Gleichung einer geraden Linie, welche einer Asymptoten parallel ist.

694. Ist der Kegelschnitt bestimmt, von dem gegeben ist: ein Punkt, eine Tangente ohne Berührungspunkt und eine Asymptote?

695. Wie heisst die Gleichung des Kegelschnittes, wenn gegeben ist: der Mittelpunkt, eine Direktrix und eine Asymptote?

696. Ist der Kegelschnitt bestimmt, wenn gegeben ist: zwei Direktrixen und zwei Punkte?

697. Durch wieviel von den folgenden Stücken ist ein Kegelschnitt vollständig bestimmt:

1. Punkte;
2. Punkte und Tangenten ohne Berührungspunkt;
3. Punkte und Tangenten mit Berührungspunkt resp. Asymptoten;
4. Tangenten ohne Berührungspunkte;
5. Tangenten mit Berührungspunkten;
6. Punkte und Mittelpunkt resp. Brennpunkt, Direktrix, Durchmesser, konjugierte Durchmesser, Axen;
7. Tangenten mit Berührungspunkten und Mittelpunkt, Brennpunkt, Direktrix, Durchmesser;
8. Mittelpunkt und Brennpunkt, Direktrix;
9. Punkte, Tangenten ohne Berührungspunkt, Asymptoten oder Parallelen zu einer der Asymptoten?

698. In wieviel Punkten schneiden sich zwei gegebene Kegelschnitte?

699. Wenn die Gleichungen von zwei Kegelschnitten sind:

$$S \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

$$S' \equiv a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33} = 0,$$

welche Kurve stellt die Gleichung $0 = S - kS'$ dar, wo k eine veränderliche Konstante — *Parameter* — ist?

700. Wenn die Gleichungen von zwei geraden Linien sind:

$$V_1 = A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad \text{oder} \quad V_n = A_nx + B_ny + C_n;$$

$$V_2 = A_2x + B_2y + C_2 = 0, \quad n = 1, 2,$$

welche Bedeutung hat die Gleichung $0 = S - kV_1V_2$?

701. Wieviel Werte von k giebt es in Aufg. 699, damit die Kurve zwei gerade Linien darstellt?

702. Wie heisst die Gleichung der Kegelschnitte, welche durch die Schnittpunkte von $S = 0$ und $S' = 0$ gehen?

703. Wie heisst die Gleichung der Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte gehen, die der Kegelschnitt $S = 0$ mit den geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ gemein hat?

704. Wenn die Gleichungen von vier geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$, $V_4 = 0$ gegeben sind, welche Kurve stellt die Gleichung $V_1 V_2 - k V_4 V_3 = 0$ dar?

705. Wie heisst die Gleichung der Kegelschnitte, welche dem aus den geraden Linien $V_1 = 0$, $V_3 = 0$, $V_2 = 0$, $V_4 = 0$ in dieser Reihenfolge gebildeten Viereck einbeschrieben sind?

706. Welches ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Schnittpunkte des Kegelschnittes $S = 0$ und den Koordinatenaxen geht?

707. Welches ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Schnittpunkte des Kegelschnittes $S = 0$ und den Axen geht?

708. Welches ist die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die Schnittpunkte des Kegelschnittes $S = 0$ und zwei konjugierten Durchmessern oder den Asymptoten geht?

709. Bestimme in der Gleichung der Aufg. 704 die Grösse k so, dass der Kegelschnitt durch fünf Punkte geht mit den Koordinaten:

- 1) $(1, 3)$, $(2, 4)$, $(5, 7)$, $(6, 8)$, $(9, 11)$;
- 2) $(1, 5)$, $(2, 3)$, $(-4, 7)$, $(9, -8)$, $(-6, -11)$;
- 3) $(4, 7)$, $(1, 5)$, $(-8, -7)$, $(-3, -2)$, $(6, -11)$;
- 4) $(1, -11)$, $(17, 13)$, $(23, -29)$, $(-31, -37)$, $(-3, -5)$;
- 5) $(7, -11)$, $(5, 13)$, $(17, 19)$, $(11, -1)$, $(-23, -29)$;
- 6) $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 6)$, $(8, 9)$.

710. In einem Kegelschnitte ist das Sechseck $ABCDEF$ gegeben; beweise den Satz 509 mit Hilfe der Aufg. 704 und 705 und durch Bestimmung der Durchschnittssehne zweier Kegelschnitte von der Form:

$$S + V_1 V_2 = 0, \quad S + V_1 V_3 = 0.$$

711. Beweise mit Hilfe der Aufg. 704 und 705 den Satz: Gehen drei Kegelschnitte durch dieselben zwei Punkte, so schneiden sich ihre drei gemeinschaftlichen Sehnen, welche

durch keinen dieser Punkte gehen, in einem Punkte. Wie folgt hieraus der Satz 545?

712. Wie sind die Kegelschnitte in Aufg. 700 gelegen, wenn eine der geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ den Kegelschnitt $S = 0$ berührt?

713. Wie sind die Kegelschnitte in Aufg. 700 gelegen, wenn die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ sich auf dem Kegelschnitt $S = 0$ schneiden?

714. Wenn $T = 0$ die Gleichung einer Tangente an den Kegelschnitt $S = 0$ ist, welche diesen Kegelschnitt im Punkte (a, b) berührt, wie heisst die Gleichung der Kegelschnitte, welche den Kegelschnitt $S = 0$ im Punkte (a, b) berühren, d. h. mit dem Kegelschnitt $S = 0$ eine gemeinschaftliche Tangente haben?

715. Welche Punkte haben die Kegelschnitte

$$S = 0, \quad S = T(mx + ny + p)$$

gemein, wenn die gerade Linie $mx + ny + p = 0$ durch den Berührungspunkt (a, b) der Tangente $T = 0$ mit dem Kegelschnitt geht? *Oskulation der Kegelschnitte.*

716. Wie sind in Aufg. 715 die Grössen m , n und p zu bestimmen, damit der Kegelschnitt $S = T(mx + ny + p)$ ein Kreis wird? oder es ist die Gleichung des den Kegelschnitt im Punkte (a, b) *oskulierenden Kreises* zu bestimmen.

717. Wie gross ist der *Krümmungshalbmesser* des Kegelschnittes $S = 0$ im Punkte (a, b) , d. h. wie gross ist der Radius des im Punkte (a, b) den Kegelschnitt $S = 0$ *oskulierenden Kreises*? *Krümmungsmittelpunkt.*

718. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung $S = kT^2$? *Kegelschnitte in doppelter Berührung.*

719. Zwei Figuren heissen *ähnlich und in ähnlicher Lage*, wenn die Radienvektoren der einen Figur von einem gewissen Punkte O in einem konstanten Verhältnis zu den parallelen Radienvektoren der zweiten Figur von einem andern Punkte O stehen. Es soll gezeigt werden, dass die Gleichungen $S = 0$ und $S - kV_1 = 0$ ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte bestimmen.

720. Sind in Aufg. 719 die Radienvektoren nicht parallel, so heissen die Figuren *ähnlich*; es soll die Bedingung gefunden werden, unter welcher die Kegelschnitte $S = 0$ und $S' = 0$ ähnlich sind.

721. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung $V_1 V_2 - k V_3^2 = 0$?

722. Wie heisst die Gleichung des Kegelschnittes, der die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ in den Punkten berührt, in welchen sie von der geraden Linie $V_3 = 0$ geschnitten werden?

723. Welche geometrische Bedeutung hat die Gleichung $k_1^2 V_1^2 + k_2^2 V_2^2 = k_3^2 V_3^2$?

724. Die Seiten eines Dreiecks seien durch die Gleichungen $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ gegeben; wie heisst die Gleichung des Kegelschnittes, in Bezug auf den der Schnittpunkt von $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ der Pol von V_3 , der Schnittpunkt von $V_1 = 0$, $V_3 = 0$ der Pol von V_2 und der Schnittpunkt von $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ der Pol von $V_1 = 0$ ist oder in Bezug auf den die geraden Linien $V_1 = 0$, $V_2 = 0$, $V_3 = 0$ die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks sind?

725. Beweise, dass die Gleichung

$$b_{11} V_1^2 + 2b_{12} V_1 V_2 + b_{22} V_2^2 = b_{33} V_3^2$$

einen Kegelschnitt bezeichnet, für den der Schnittpunkt von $V_1 = 0$, $V_2 = 0$ Pol der geraden Linie $V_3 = 0$ ist.

726. Wie folgt aus den Gleichungen der drei Kegelschnitte $S = 0$, $S + V_1^2 = 0$, $S + V_2^2 = 0$ der Satz: Wenn zwei Kegelschnitte mit einem dritten Kegelschnitt in *doppelter Berührung* sind, so gehen ihre Berührungssehnens mit diesem und eines von den drei Paaren der Durchschnittssehnens durch einen Punkt und bilden zwei harmonische Linienpaare?

727. Wie heisst der Satz 726, wenn der Kegelschnitt $S = 0$ in zwei gerade Linien zerfällt?

728. Wie heisst der Satz 726, wenn $S + V_1^2 = 0$, $S + V_2^2 = 0$ sich auf ein Linienpaar reduzieren?

729. Wie folgt aus den Gleichungen

$$S + V_1^2 = 0, \quad S + V_2^2 = 0, \quad S + V_3^2 = 0, \quad S = 0$$

der Satz: Wenn drei Kegelschnitte mit einem vierten Kegelschnitte in doppelter Berührung sind, so gehen die sechs

Durchschnittssehnen derselben viermal zu je drei durch einen Punkt.

730. Wie heisst der Satz 729, wenn $S = 0$ in zwei gerade Linien zerfällt?

731. Wie folgt Satz 510 aus Satz 729?

732. Es sei $x_n = x \cos \alpha_n + y \sin \alpha_n - \delta_n$; welche Bedeutung hat $x_1 x_3 = k x_2^2$?

733. Was bedeutet in der Bezeichnung der Aufg. 732 $x_1 x_3 = k x_2 x_4$?

734. Es soll bewiesen werden, dass die gerade Linie $u^2 x_1 - 2u x_2 + x_3 = 0$ die Kurve $x_1 x_3 + x_2^2 = 0$ berührt? Mit Hilfe dieser Aufg. die Aufg. 638—641 zu lösen.

735. Beweise den Satz:

Der geometrische Ort der zugeordneten Strahlen von zwei projektivischen Strahlbüscheln ist ein Kegelschnitt, welcher die Träger der beiden Büschel enthält.

Die Enveloppe der geraden Verbindungslinien der zugeordneten Punkte von zwei projektivischen Punktreihen ist ein Kegelschnitt, welcher die Träger der Punktreihen zu Tangenten hat.

Wie erhält man aus diesen Sätzen die Aufg. 509, 510? Wie folgt hieraus der Satz: Vier feste Tangenten eines Kegelschnittes bestimmen auf einer beweglichen Tangente desselben eine Punktreihe von konstantem Doppelverhältnis?

Die Ellipse.

736. Die Gleichung der Ellipse ist

$$a_{11} x^2 + 2a_{12} xy + a_{22} y^2 + 2a_{13} x + 2a_{23} y + a_{33} = 0,$$

wenn $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ negativ ist. Wie bestimmen sich die Koeffizienten in der Gleichung

$$a'_{11} x^2 + 2a'_{12} xy + a'_{22} y^2 + 2a'_{13} x + 2a'_{23} y + a'_{33} = 0,$$

wenn man die Koordinatenachsen parallel verschiebt und dies die Mittelpunktsgleichung sein soll?

737. In Aufg. 736 seien die Axen rechtwinklig. Wie bestimmen sich in der Gleichung $A_{11} x^2 + A_{22} y^2 + A_{33} = 0$ die A durch die a' , wenn man die Axen in Aufg. 736 so dreht, dass sie mit den Axen der Ellipse zusammenfallen?

738. Wie ändern sich durch die Transformation in Aufgabe 737 die Grössen $a'_{11} + a'_{22}$ und $a'_{11} a'_{22} - a'^2_{12}$?

739. Transformiere die Mittelpunkts Gleichung dadurch, dass man die Axe der x beibehält und statt der Axe der y eine gegen x unter den Winkel w geneigte Axe einführt. Bestimme die Gleichung in Bezug auf zwei konjugierten Durchmessern.

740. Bestimme die Axen der Ellipse und die konjugierten Durchmesser, von denen der eine mit einer Axe den Winkel $\varphi = 18^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ einschliesst:

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $11y^2 - 4xy + 14x^2 = 49,$ | 4) $x^2 + 4y^2 = 1,$ |
| 2) $y^2 - 2xy + 5x^2 = 1,$ | 5) $9x^2 + 16y^2 = 36,$ |
| 3) $4x^2 - xy + y^2 = 7,$ | 6) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1,$ |

und transformiere die Gleichung zu ihnen. Bestimme die Schnittpunkte von den Kurven.

741. Man transformiere die Gleichungen:

- | | |
|------------------------------|-------------------------------|
| 1) $5x^2 + 6xy + 10y^2 = 9,$ | 4) $7x^2 + 5xy + 5y^2 = 11,$ |
| 2) $9x^2 + 3xy + y^2 = 7,$ | 5) $3x^2 + 6xy + 16y^2 = 13,$ |
| 3) $5x^2 + 2xy + y^2 = 8,$ | 6) $9y^2 + xy + x^2 = 25,$ |

unter der Voraussetzung, dass die Axen der x und y einen Winkel bilden, der gegeben ist durch: $\cos w = \frac{3}{5}, w = 60^\circ, = 35^\circ, = 18^\circ, = \alpha$, zu den Axen der Ellipse. Bestimme die Schnittpunkte von je zwei dieser Kurven. Transformiere zu den konjugierten Durchmessern, wenn der eine mit der Axe den Winkel α hat.

742. Wiederhole Aufg. 157, 650.

743. Bestimme die Polargleichung der Ellipse, wenn der Mittelpunkt der Pol ist.

744. Wie gross ist der Inhalt des durch Verbindung der Ecken von zwei konjugierten Durchmessern gebildeten Vierecks?

745. Beweise, dass die Summe der Quadrate zweier konjugierten Durchmesser konstant ist.

746. Untersuche die Figur, deren Gleichung ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{a^2 - b^2}{a^2} = e^2.$$

Endpunkte der Axen heissen *Scheitel*. e ist *Excentricität* der Ellipse. $a > b$, $2a$ grosse, $2b$ kleine Axenlänge.

747. Durchmesser der Ellipse, welche mit der Axe denselben Winkel bilden, sind gleich. Wie heisst die Umkehrung dieses Satzes?

748. Über der grossen Axe einer Ellipse als Durchmesser beschreibe man einen Kreis, nehme in jeder Ordinate LQ desselben einen Punkt P derart an, dass LP und LQ in einem konstanten Verhältniss $a:b$ (grosse Axe zur kleinen Axe) stehen; der Ort von P soll bestimmt werden.

749. Wie heisst die Gleichung der Tangente in x', y' der Ellipse Aufg. 746? Wie heisst die Gleichung der Sehne, welche die Punkte x', y' und x'', y'' der Ellipse verbindet?

750. Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte $(0, 3)$ der Ellipse

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1?$$

751. Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkte $(1, \frac{3}{2})$ der Ellipse $3x^2 + 4y^2 = 12$?

752. Wie heisst die Gleichung der Tangente, an die Ellipse, wenn sie durch den Punkt x', y' geht und die Gleichung der Ellipse auf die Axen bezogen ist?

753. Bestimme die Polare des Punktes x', y' in Bezug auf die Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Bestimme den Pol der geraden Linie $mx + ny = 1$ in Bezug auf dieselbe Ellipse.

754. Unter welcher Bedingung ist die gerade Linie, deren Gleichung $mx + ny = 1$ ist, Tangente an die Ellipse in Aufg. 753?

755. Den durch das Tangentenpaar von x', y' an die Ellipse Aufg. 753 gebildeten Winkel zu bestimmen. Setze $(x', y') = (3, 2), (5, 9), (1, 4)$ und nehme die Ellipsen der Aufgaben 740, 741, 750, 751.

756. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 755 der Punkt $x' y'$, wenn die beiden Tangenten an die Ellipse senkrecht stehen?

757. Eine Ellipse ist gegeben und ausserhalb oder innerhalb derselben ein Punkt P mit den Koordinaten $x' y'$; man verbinde den Mittelpunkt O der Ellipse mit P ; welche Gleich-

ung hat der zu OP konjugierte Durchmesser, wenn die Gleichung der auf die Axen bezogenen Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ist? Bestimme die Winkel, welche die konjugierten Durchmesser mit der Axe der x bilden. Wie liegen die konjugierten Durchmesser gegen die Axen?

758. In der letzten Aufgabe bestimme man die Durchschnitte des zu OP konjugierten Durchmessers mit der Ellipse.

759. Bestimme die Längen eines Durchmessers a' und seines konjugierten b' in Gliedern der Abscisse vom Endpunkte des Durchmessers a' und beweise, dass die Summe der Quadrate irgend eines Paares von konjugierten Durchmessern einer Ellipse konstant ist.

760. Welchen Winkel schliessen zwei konjugierte Durchmesser ein?

761. Beweise den Satz: Das Dreieck, welches den Mittelpunkt einer Ellipse und die Endpunkte zweier konjugierten Durchmesser zu Ecken hat, hat einen konstanten Inhalt (s. Aufg. 760).

762. Bestimme die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkt auf eine Tangente an die Ellipse und zwar 1. durch die Länge der Axen und eines Durchmessers, 2. durch die Winkel, welche die Senkrechte mit den Axen einschliesst.

763. Sehnen, welche einen Punkt eines Kegelschnittes mit den Enden eines Durchmessers verbinden, heissen *Supplementarsehnen*. Beweise den Satz: Durchmesser, welche zu einem Paar Supplementarsehnen parallel sind, sind konjugiert.

764. Bestimme und konstruiere die Paare von konjugierten Durchmessern, welche einen gegebenen Winkel einschliessen. Bestimme die an Länge gleichen konjugierten Durchmesser und die Gleichung der Ellipse in Bezug auf diesen Durchmesser.

765. Die Tangenten an den Endpunkten eines Durchmessers sind parallel dem konjugierten Durchmesser.

766. Schneidet eine veränderliche Tangente einer Ellipse zwei feste parallele Tangenten, so bestimmt diese auf den festen Tangenten Segmente, deren Produkt gleich dem Quadrat des zu ihnen parallelen Halbdurchmessers und konstant ist.

767. In der letzten Aufgabe sei das Rechteck aus den Segmenten der veränderlichen Tangente zu bestimmen und zu beweisen, dass es gleich dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbdurchmessers ist.

768. Eine Tangente, welche eine Ellipse in A berührt, wird von zwei konjugierten Durchmessern in B und C geschnitten; es ist zu beweisen, dass das Rechteck aus den Segmenten dieser Tangente, gleich dem Quadrat des zu ihr parallelen Halbdurchmessers ist.

769. Von einer Ellipse sind zwei konjugierte Durchmesser der Grösse und Lage nach gegeben; man soll deren Axen konstruieren.

770. Mit Hilfe des Satzes: „Bewegt sich eine gerade Linie mit zweien ihrer Punkte auf zwei festen geraden Linien, so beschreibt ein beliebig dritter Punkt der beweglichen geraden Linie eine Ellipse“, aus zwei konjugierten Durchmessern eine Ellipse zu konstruieren.

771. Bestimme auf der grossen Axe die Entfernung der Brennpunkte (s. Aufg. 644, 742). Bestimme die Koordinaten eines Brennpunktes.

772. Bestimme die Entfernung eines beliebigen Punktes der Ellipse vom Brennpunkt (s. Aufg. 742).

773. Bestimme die Polaren der Brennpunkte in Bezug auf eine gegebene Ellipse.

774. Beweise, dass die Polare eines Brennpunktes in Bezug auf eine Ellipse die Direktrix ist (s. Aufg. 644).

775. Beweise den Satz: Das Produkt der Senkrechten von den Brennpunkten einer Ellipse auf die Tangente ist gleich dem Quadrat der halben kleinen Axe (s. Aufg. 659).

776. Eine Tangente AB berührt die Ellipse in M , welcher Punkt zwischen A und B liegt; von den Brennpunkten FF' ziehe man die *Brennstrahlen* FM , $F'M$; beweise, dass $\sphericalangle FMA = \sphericalangle F'MB$ ist.

777. Es sei eine Ellipse mit dem Mittelpunkte O , dem Brennpunkte F und eine Tangente MA im Punkte M der Ellipse bestimmt; es sei die gerade Linie OA parallel dem Brennstrahle FM ; wie gross ist OA ?

778. Bestimme die Kegelschnitte, welche mit einer Ellipse dieselben Brennpunkte haben. *Konfokale Kegelschnitte*.

779. Beweise, dass konfokale Kegelschnitte sich rechtwinklig schneiden, d. h. ihre entsprechenden Tangenten im Schnittpunkt stehen senkrecht.

780. Beweise den Satz: Die Tangenten, welche man durch einen beliebigen Punkt auf einer Ellipse an einen konfokalen Kegelschnitt ziehen kann, bilden mit der Tangente des Kegelschnittes gleiche Winkel.

781. Bestimme den Ort der Fusspunkte der Senkrechten von einem Brennpunkte der Ellipse auf die Tangenten.

782. Beweise für die Ellipse den Satz: Der zwischen dem Berührungspunkt und einer Direktrix liegende Abschnitt einer Tangente erscheint von dem zugehörigen Brennpunkt aus unter einem rechten Winkel.

783. Ist P der Pol einer geraden Linie, welche die Ellipse in den Punkten A und B schneidet, so soll gezeigt werden, dass $\sphericalangle AFB = \sphericalangle BFP$ ist (wenn F der Brennpunkt ist).

784. Wie heisst der Satz 783, wenn AB durch F geht?

785. Es sei eine Ellipse gegeben und die mit der Ellipse konfokalen Kegelschnitte; zu einer festen geraden Linie bestimme man in Bezug auf alle Kegelschnitte die Pole und beweise, dass diese Pole auf einer geraden Linie liegen.

786. Schneidet eine Sehne PP' die Direktrix einer Ellipse mit dem Brennpunkte F in dem Punkte M , so ist FM die Halbierungslinie des Nebenwinkels von PFP' .

787. Es bewege sich der Punkt P auf einer gegebenen Ellipse, auf welcher die festen Punkte Q, Q' liegen; die geraden Linien PQ, PQ' schneiden die zu dem Brennpunkt F gehörende Direktrix in den Punkten M, M' ; es soll bewiesen werden, dass $\sphericalangle MFM' = \frac{1}{2} \sphericalangle QFQ'$ ist, also unabhängig von der Lage des Punktes P ist.

788. Wenn ein Punkt sich in einer geraden Linie senkrecht zur Axe der Ellipse bewegt, so dreht sich die von ihm auf seine Polare gefällte Senkrechte um einen festen Punkt der Axe.

789. Von einem Punkte P ziehe man die Tangenten an die Ellipse; die Berührungssehne ist Polare zu P . Von dem Mittelpunkt C und den Brennpunkten F, F' fälle man die Senkrechten $FK, CA, F'K'$ auf die Polare und zieht $PB \parallel AC$. Es sollen die Längen der Senkrechten gefunden werden, wenn P die Koordinaten (m, n) hat.

790. Wie bestimmen sich in Aufg. 789 die Längen der Senkrechten, wenn P innerhalb der Ellipse liegt und die Polare AB hat?

791. Wenn in Aufg. 789 die gerade Linie BP die grosse Axe in B' trifft, so beweise

$$CA \cdot PB' = b^2; \quad PB' \cdot BB' = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - e^2 m^2);$$

$$FK \cdot F'K' = CA \cdot B'B.$$

792. Wie heisst die Polargleichung der Ellipse, wenn der Brennpunkt Pol ist? Führe in diese Gleichung die doppelte Ordinate des Brennpunktes — den *Parameter* — ein.

793. Beweise, dass der Parameter einer Ellipse gleich dem harmonischen Mittel zwischen den Segmenten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne ist, oder das Produkt aus den Segmenten einer durch den Brennpunkt gehenden Sehne der Ellipse steht zur ganzen Sehne in einem konstanten Verhältniss.

794. Zieht man durch den Brennpunkt eine Sehne und zu der Sehne einen parallelen Durchmesser, so ist das Quadrat des Durchmessers gleich dem Rechteck aus der Sehne und der grossen Axe.

795. Zieht man durch den Brennpunkt der Ellipse zwei Sehnen parallel zwei konjugierten Durchmessern, so ist die Summe der Sehnen konstant (s. Aufg. 759).

796. Wie gross ist die Summe der reciproken Längen von zwei durch den Brennpunkt einer Ellipse gehenden zu einander senkrechten Sehnen?

797. Wie ändert sich in Aufg. 791 der Ausdruck $PB' \cdot BB'$ um, wenn P auf der Ellipse liegt? PB heisst in diesem Falle die *Normale der Ellipse*, denn eine durch irgend einen Punkt einer Kurve senkrecht zur Tangente in diesem Punkte errichtete gerade Linie heisst Normale. Fällt man von P

eine Senkrechte auf die Hauptaxe der Ellipse, welche diese in M trifft, so heisst BM die *Subnormale*. Den Punkt P nenne ich den *Fusspunkt* der Normalen auf der Kurve. Schneidet die Tangente in P die grosse Axe in B , so heisst der Abschnitt MR die *Subtangente*.

798. Beweise, dass die Abschnitte CB und CM in konstantem Verhältnisse stehen. (Bezeichnung wie in Aufg. 789 und 797, wenn P auf der Kurve liegt und B' mit B bezeichnet wird.)

799. Schneidet in Aufg. 798 die gerade Linie PB die kleine Axe in D , so soll bewiesen werden, dass das Produkt aus den Abschnitten der Normallängen PB gleich dem Quadrat des Halbdurchmessers ist, welcher zu dem Durchmesser PC konjugiert ist. Wie gross ist der Quotient dieser Abschnitte?

800. Beweise, dass die Länge der Normalen zwischen dem Fusspunkt und ihrem Schnittpunkte mit der grossen Axe, multipliziert mit der Länge des Perpendikels vom Mittelpunkt der Ellipse auf die zugehörige Tangente, konstant und gleich dem Quadrate der halben grossen Axe ist. Wie heisst der Satz, wenn die Länge der Normalen zwischen Fusspunkt und dem Schnittpunkt mit der kleinen Axe genommen wird?

801. Bestimme die Länge der Normalen zwischen Fusspunkt und ihrem Schnittpunkt mit der Axe durch den Winkel, welchen sie mit der Axe einschliesst.

802. Von einem Punkte mit den Koordinaten $x'y'$ die Normale an eine Ellipse zu bestimmen. Durch welchen Kegelschnitt werden die vier Fusspunkte der Normalen bestimmt?

803. Es sei eine Ellipse und auf ihr ein Punkt M gegeben; von M ziehe man zwei gerade Linien, welche die Ellipse in P und P' schneiden, so, dass sie mit der Normalen in M Winkel bilden, für welche das Produkt der trigonometrischen Tangenten konstant bleibe; es soll bewiesen werden, dass die geraden Linien PP' sich in einem festen Punkte der Normalen in M schneiden. Führe den Beweis mittelst der Scheitelgleichung der Ellipse, d. h. die grosse Axe ist die Axe der x und die Tangente im Scheitel die Axe der y .

804. Bestimme die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten und die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen in den Punkten (m, n) , (p, q) der auf die Axen bezogenen Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

805. Bestimme in der letzten Aufgabe die Koordinaten des Normalendurchschnittspunktes so, dass die gegebenen Koordinaten nur als Summen auftreten; lasse dann den Punkt (p, q) mit (m, n) zusammenfallen und gebe die Koordinaten des Schnittpunktes der zwei aufeinander folgenden Normalen an. Wie gross ist die Normale von dem Schnittpunkt bis zum Fusspunkt oder wie gross ist der Krümmungshalbmesser der Ellipse in dem Punkte (m, n) ?

806. Ist C der Mittelpunkt einer Ellipse, in welcher der Punkt P liegt; die Normale in P trifft die grosse Axe in N ; F ist ein Brennpunkt; bestimme den Krümmungshalbmesser durch die Länge PN , den Winkel $\angle FPN$ und konstruiere darnach den Krümmungskreis resp. den Krümmungsmittelpunkt. Bestimme den Krümmungsradius durch $\angle PNC$.

807. Bestimme die Koordinaten des Punktes, in welchem der oskulierende oder Krümmungskreis die Ellipse schneidet.

808. Drei Punkte einer Ellipse, deren Krümmungskreise durch einen gegebenen Punkt der Ellipse gehen, liegen mit diesem Punkte auf einem Kreise, und sind die Ecken eines Dreiecks, dessen Seitenhalbierungslinien sich im Mittelpunkt der Ellipse schneiden.

809. Bestimme die Gleichung der *Evolute* der Ellipse, d. h. des Orts der Krümmungsmittelpunkte. (Die Gleichung hat die Form $\left(\frac{x}{A}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{B}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$).

810. Es sei eine Ellipse gegeben; auf ihr nimmt man einen Punkt P an, welcher der Mittelpunkt einer Ellipse sein soll, deren Axen in die Tangente und Normale im Punkte P der gegebenen Ellipse fallen; diese Ellipsen sollen respective die grosse oder kleine Axe der gegebenen Ellipse in ihrem Mittelpunkte berühren; es soll gezeigt werden, dass die Brennpunkte der so bestimmten Ellipsen auf zwei konzentrischen Kreisen liegen. Bestimme die Radien dieser Kreise.

811. Ist P ein Punkt einer Ellipse, F und F' deren Brennpunkte, so beweise, wenn PN , die Normale in P , den Winkel FPF' halbiert, dass diese Normale FF' in zwei Segmente teilt, welche den Radienvektoren FP und $F'P$ proportional sind.

812. Es ist eine Ellipse mit den Brennpunkten F und F' gegeben. Die Senkrechte in F trifft die Ellipse in M ; in M lege man eine Tangente an die Ellipse MT ; von einem Punkte P der Ellipse fälle man die Senkrechte PR auf die gerade Linie, welche MT in T trifft; man zeige, dass $TR = FP$ ist.

813. Den Punkt M einer Ellipse verbinde mit dem Mittelpunkt C ; lege in M eine Tangente und fälle auf diese Tangente eine Senkrechte vom Brennpunkt aus; welchen Ort beschreibt der Schnittpunkt dieser Senkrechten mit der geraden Linie CM ?

814. In der Aufg. 813 verbinde man M mit dem Brennpunkt und fälle vom Mittelpunkt C eine Senkrechte auf die Tangente in M ; welchen Ort beschreibt der Schnittpunkt des Brennstrahles mit der durch den Mittelpunkt gehenden Senkrechten?

815. In der Aufg. 813 schneide die Tangente in M die kleine Axe in N ; von N fälle man eine Senkrechte auf FM ; welchen Ort beschreibt der Schnittpunkt von FM mit dieser Senkrechten?

816. Welchen Ort bestimmen die Durchschnittspunkte der Tangenten in den Endpunkten je zwei konjugierter Durchmesser?

817. Vom Brennpunkt einer Ellipse ziehe man gerade Linien unter einem gegebenen Winkel gegen die Tangenten der Kurve; welchen Ort beschreiben die Schnittpunkte der geraden Linien und der Tangenten?

818. Es seien konfokale Ellipsen gegeben; von einem festen Punkte ziehe man die Tangenten an diese Ellipsen; auf welcher Kurve liegen die Berührungspunkte?

819. Geht eine Sehne AA' einer Ellipse durch einen festen Punkt M , so besteht die Gleichung

$$\tan \frac{1}{2} AFM \cdot \tan \frac{1}{2} A'FM = \text{konstant},$$

wenn F ein Brennpunkt ist.

820. Bestimme den Ort des Schnittpunktes der Normalen an den Enden einer Sehne durch den Brennpunkt der Ellipse.

821. Von einem Punkte P ziehe man zwei Tangenten an die Ellipse; diese schliessen einen Winkel φ ein; bestimme den Winkel φ durch die Länge der grossen Axe und den Brennpunktsentfernungen PF, PF' .

822. In der letzten Aufgabe fälle man von F und F' Senkrechte auf die beiden Tangenten, ziehe die zu den Tangenten parallelen Durchmesser, welche die Längen $2D, 2D'$ haben; die Längen auf den Tangenten zwischen den resp. Fusspunkten der Senkrechten seien l, l' ; es ist zu zeigen, dass ist $ll' + DD' = PF \cdot PF'$.

823. Die Länge der Sehne einer Ellipse, welche eine konfokale Ellipse mit den Quadraten der Halbaxen $a^2 - m^2, b^2 - m^2$ berührt, ist gleich $2mb_1^2:ab$, wenn b_1 der Halbdurchmesser ist, welcher ~~dem zu der Sehne parallelen Durchmesser konjugiert~~ ist.

824. Leite die Aufg. 823 aus dem folgenden Satz ab: Wenn ein Punkt O in der Ebene einer Ellipse mit den Brennpunkten F, F' derselben verbunden wird, welche Verbindungslinien die Ellipse in den Punkten M, M', N, N' bezüglich schneiden, so ist $\frac{1}{OM} - \frac{1}{ON} = \frac{1}{OM'} - \frac{1}{ON'}$.

825. Die Gleichung einer Ellipse sei in Bezug auf die Axen a, b gegeben; man setze $x = a \cos \varphi, y = b \sin \varphi$, wie gross sind die Längen von zwei konjugierten Durchmessern in φ ausgedrückt? Welche geometrische Bedeutung hat der Winkel φ ? φ heisst *excentrischer Winkel*.

826. Mit Hilfe des Winkels φ konstruiere zu einem gegebenen Durchmesser den dazu konjugierten Durchmesser der Ellipse (s. Aufg. 825).

827. Die Gleichung einer Sehne der Ellipse, welche durch die Punkte geht, denen die Winkel φ und φ' entsprechen (Aufg. 825) durch die Winkel φ und φ' zu bestimmen.

828. Wie heisst die Gleichung der letzten Aufgabe, wenn die Sehne zur Tangente wird?

829. Die Länge der die zwei Punkte φ , φ' verbindenden Sehne der Ellipse zu finden, wenn man abgekürzt statt Punkt $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$ Punkt φ sagt (Aufg. 825).

830. Bestimme den Inhalt des der Ellipse eingeschriebenen Dreiecks, dessen Endpunkte φ' , φ'' , φ''' sind. Bestimme den Radius des diesem Dreieck umschriebenen Kreises (s. Aufg. 829).

831. Bestimme den Inhalt des der Ellipse umschriebenen Dreiecks mit Hilfe der Winkel φ (s. Aufg. 825).

832. Beweise mit Hilfe der Winkel φ den Satz: Die Dreiecke, welche zwei Halbdurchmesser mit den beiden Tangenten der Ellipse in ihren Endpunkten einschliessen, haben gleiche Flächen (s. Aufg. 825).

833. Beweise mit Hilfe der Winkel φ folgende Aufgabe: CP und CP' sind zwei konjugierte Durchmesser der Ellipse; von P und P' fälle man auf die grosse Axe Senkrechte, welche die grosse Axe in den resp. Punkten M und M' treffen; es soll gezeigt werden, dass $\triangle PCM = \triangle P'CM'$ ist (s. Aufgabe 825).

834. Über der grossen Axe einer Ellipse beschreibe man einen mit der Ellipse konzentrischen Kreis; von einem Punkte Q des Kreises fälle man eine Senkrechte auf die grosse Axe, welche die Ellipse in P schneidet; die Verbindungslinie des Brennpunktes F mit P schneidet CQ in R ; welchen Ort beschreibt R ?

835. In der letzten Aufgabe ziehe man an P die Normale, welche CQ in N trifft; welchen Ort beschreibt N ?

836. Vom Scheitel der Ellipse ziehe man nach einem Punkte P der Ellipse eine Sehne und durch den Mittelpunkt eine Parallele zu dieser Sehne. Es soll der Ort des Schnittpunktes des parallelen Durchmessers mit der Tangente in P bestimmt werden.

837. Es sei P ein Punkt einer gegebenen Ellipse, O ein fester Punkt; es soll der Ort des Punktes Q so bestimmt werden, dass $OP:OQ$ konstant ist. O heisst *Ähnlichkeitsmittelpunkt* oder *Centrum der Ähnlichkeit*. Bestimme die Schnittpunkte der dem Orte Q und der Ellipse gemeinschaftlichen Tangenten.

838. Gebe die Bedingung an, unter welcher durch die allgemeine Gleichung gegebene Ellipsen ähnlich und ähnlich gelegen sind. Ähnliche Ellipsen haben dieselbe Excentricität.

839. Zieht man in Aufg. 837 durch O ein paar gerade Linien, so sind die Verbindungssehnen ihrer Endpunkte entweder parallel oder sie schneiden sich in der *Radikalaxe* der Kurven.

840. Beweise, dass die dreien ähnlichen Ellipsen entsprechenden Centren der Ähnlichkeit zu dreien in vier geraden Linien liegen.

841. Schneidet eine gerade Linie zwei ähnliche und ähnlich liegende konzentrische Ellipsen, so sind die zwischen den Ellipsen enthaltenen Segmente gleich. Jede Sehne der äussern Ellipse, welche die innere Ellipse berührt, wird im Berührungspunkte halbiert.

842. Ist in der Aufg. 841 S der Scheitel der inneren Ellipse und schneidet die Tangente in S die äussere in den Punkten P und P_1 , so ist jede durch S gezogene Sehne der inneren die Hälfte der algebraischen Summe der parallelen Sehnen der äusseren Ellipse durch die Punkte P und P_1 .

843. Bestimme die Bedingung, unter welcher durch die allgemeinen Gleichungen gegebene Ellipsen ähnlich sind, ohne ähnlich zu liegen.

844. Es sei eine Ellipse gegeben; man soll die Kegelschnitte bestimmen, welche Tangente und Berührungspunkt mit der Ellipse gemein haben.

845. Es sei eine Ellipse gegeben; man soll die in einem Punkte oskulierenden Kegelschnitte bestimmen.

846. Es sei eine Ellipse und ein oskulierender Kegelschnitt gegeben; bestimme deren sonstige Schnittpunkte.

Die Hyperbel.

847. Wiederhole die Aufg. 736—740, wenn $a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$ positiv ist und beweise, dass die auf die Axen bezogene Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist. $2a$ ist die Länge der *transversalen Axe* oder *Hauptaxe*, $2b$ ist die Länge der *Nebenaxe*; $a^2 + b^2 = a^2 e^2$; e ist *Excentricität* der Hyperbel.

848. Bestimme die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf zwei konjugierte Durchmesser.

849. Bestimme die Axen der Hyperbel:

- | | |
|---------------------------|----------------------------|
| 1) $y^2 + 4xy + x^2 = 8,$ | 4) $x^2 + 6xy - 3y^2 = 5,$ |
| 2) $xy = 1,$ | 5) $5x^2 - 7y^2 = 35,$ |
| 3) $x^2 - y^2 = 1,$ | 6) $8x^2 - y^2 = 64,$ |

und transformiere die Gleichung zu ihnen. Bestimme die Schnittpunkte von je zwei dieser Kurven. Bestimme die konjugierten Durchmesser dieser Hyperbeln, wenn der eine mit der Axe den Winkel $\varphi = 18^\circ, 30^\circ, 60^\circ$ bildet.

850. Man transformiere die Gleichungen:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------|
| 1) $xy = 8,$ | 4) $7x^2 - 5y^2 = 25,$ |
| 2) $9x^2 - 7y^2 = 3,$ | 5) $x^2 - y^2 = 1,$ |
| 3) $x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 = 5,$ | |

unter der Voraussetzung, dass die Axen der x und y einen Winkel bilden, der gegeben ist durch

$$\cos w = \frac{3}{5}; \quad w = 18^\circ = 35^\circ = \alpha,$$

zu den Axen der Hyperbel, zu den konjugierten Durchmessern, wenn der eine mit der einen Axe den Winkel: $20^\circ, 15^\circ, 18^\circ$ einschliesst.

851. Wiederhole Aufg. 158.

852. Bestimme die Polargleichung der Hyperbel, wenn der Mittelpunkt der Pol ist.

853. Beweise, dass die Differenz der Quadrate zweier konjugierten Durchmesser konstant ist.

854. Durchmesser der Hyperbel, welche mit der Axe denselben Winkel bilden, sind gleich. Wie heisst die Umkehrung dieses Satzes?

855. Wie heisst die Gleichung der Tangente in $x'y'$ der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$? Wie heisst die Gleichung der Sehne, welche die Punkte x', y' und x'', y'' derselben Hyperbel verbindet?

856. Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte $(9, 4\sqrt{2})$ der Hyperbel $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$?

857. Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte $(-7, 4\sqrt{3})$ der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$?

858. Wie heisst die Gleichung der Tangente an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, wenn sie durch einen Punkt x', y' geht? Setze $x', y' = (3, 2), (5, 9)$ und nehme die Hyperbeln 849 und 850, 856, 857.

859. Bestimme die Polare des Punktes x', y' in Bezug auf die Hyperbel, wenn deren Gleichung auf die Axen bezogen ist. Bestimme den Pol der geraden Linie $mx + ny = 1$ in Bezug auf dieselbe Hyperbel.

860. Unter welcher Bedingung ist die gerade Linie, deren Gleichung $mx + ny = 1$ ist, Tangente an die Hyperbel:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1?$$

861. Den durch das Tangentenpaar von x', y' an die Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ gebildeten Winkel zu bestimmen. Setze für $x', y'; a, b$ die Werte aus Aufg. 858.

862. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 861 der Punkt x', y' , wenn die beiden Tangenten an die Hyperbel senkrecht stehen?

863. Eine Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ist gegeben und ein Punkt x', y' , welcher nicht auf der Hyperbel liegt; man verbinde den Mittelpunkt O der Hyperbel mit dem Punkte x', y' ; welche Gleichung hat der zu $O(x', y')$ konjugierte Durchmesser? Bestimme die Winkel, welche die konjugierten Durchmesser mit der Axe der x bilden.

864. In der letzten Aufgabe bestimme man die Durchschnitte der beiden konjugierten Durchmesser mit der Hyperbel.

865. Wie heisst die Aufg. 759 für die Hyperbel?

866. Welchen Winkel schliessen zwei konjugierte Durchmesser der Hyperbel ein?

867. Beweise den Satz: Das Dreieck, welches den Mittelpunkt einer Hyperbel und die Endpunkte zweier konjugierten Durchmesser zu Ecken hat, hat einen konstanten Inhalt.

868. Bestimme die Länge der Senkrechten vom Mittelpunkt auf eine Tangente an die Hyperbel und zwar 1. durch die Länge der Axen und des Durchmessers, welcher zu dem Durchmesser durch den Berührungspunkt konjugiert ist, 2. durch die Winkel, welche die Senkrechte mit den Axen einschliesst.

869. Durchmesser, welche zu einem Paar Supplementar-sehnen parallel sind, sind konjugiert (s. Aufg. 763).

870. Bestimme und konstruiere die Paare von konjugierten Durchmessern, welche einen gegebenen Winkel einschliessen.

871. Schneidet eine veränderliche Tangente einer Hyperbel zwei feste parallele Tangenten, so bestimmt diese auf den festen Tangenten Segmente, deren Produkt konstant und gleich dem Quadrat des zu ihnen parallelen Halbdurchmessers ist.

872. In der letzten Aufgabe bestimme das Rechteck aus den Abschnitten der veränderlichen Tangente (s. Aufg. 767).

873. Eine Tangente, welche eine Hyperbel in P berührt, wird von zwei konjugierten Durchmessern in M und N geschnitten; bestimme das Produkt der Abschnitte auf der Tangente (s. Aufg. 768).

874. Von einer Hyperbel sind zwei konjugierte Durchmesser der Grösse und Lage nach gegeben; man soll deren Axen konstruieren.

875. Bestimme auf der grossen Axe die Entfernung der Brennpunkte einer Hyperbel (s. Aufg. 644, 851). Gebe die Koordinaten der Brennpunkte an.

876. Bestimme die Entfernung eines beliebigen Punktes der Hyperbel vom Brennpunkt (s. Aufg. 851).

877. Bestimme die Polaren der Brennpunkte der Hyperbel und beweise, dass sie mit den Direktrizen zusammenfallen (s. Aufg. 644).

878. Bestimme die Längen der Senkrechten von den Brennpunkten auf eine Tangente der Hyperbel und übersetze die Aufg. 775 für die Hyperbel.

879. Eine Tangente AB berührt die Hyperbel in M , welcher Punkt zwischen A und B liegt; von den Brennpunkten F, F' ziehe man die Brennstrahlen $FM, F'M$; beweise die Relation $\sphericalangle FMA = \sphericalangle F'MB$.

880. Eine gegebene Hyperbel habe den Mittelpunkt O , einen Brennpunkt F und in M eine Tangente MA ; es sei $OA \parallel FM$, wie gross ist OA ?

881. Bestimme die Kegelschnitte, welche mit einer Hyperbel dieselben Brennpunkte haben.

882. Beweise für die Hyperbeln Aufg. 779.

883. Beweise den Satz: Wenn eine Ellipse und eine Hyperbel dieselben Brennpunkte haben, so schneiden sie einander rechtwinklig.

884. Wie heisst Aufg. 780 für die Hyperbel?

885. Bestimme den Ort der Fusspunkte der Senkrechten von einem Brennpunkte der Hyperbel auf die Tangenten.

886. Beweise für die Hyperbel den Satz: Der zwischen dem Berührungspunkt und einer Direktrix liegende Abschnitt einer Tangente erscheint von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel.

887. Ist F ein Brennpunkt einer Hyperbel, P der Pol einer geraden Linie, welche die Hyperbel in A und B schneidet, so soll bewiesen werden, dass $\sphericalangle AFP = \sphericalangle BFP$ ist.

888. Wie heisst der Satz 887, wenn AB durch F geht?

889. Wie heisst der Satz 785 für die Hyperbel?

890. Übersetze Satz 786 für die Hyperbel.

891. Nehme in Aufg. 787 statt Ellipse eine Hyperbel.

892. Beweise für die Hyperbel Satz 788.

893. Von einem Punkte P ziehe man Tangenten an die Hyperbel; die Berührungssehne ist Polare zu P . Von dem Mittelpunkt C und den Brennpunkten F, F' fälle man die Senkrechten $FK, CA, F'K'$ auf die Polare und ziehe $PB \parallel AC$. Es sollen die Längen der Senkrechten bestimmt werden, wenn P die Koordinaten (m, n) hat.

894. Wie bestimmen sich die Längen der Aufg. 893, wenn P innerhalb der Hyperbel liegt?

895. Wenn in Aufg. 893 die gerade Linie BP die Hauptaxe in B' trifft, wie gross sind die Produkte $CA \cdot PB'$? $PB' \cdot BB'$? $FK \cdot F'K'$?

896. Wie heisst die Polargleichung der Hyperbel, wenn ein Brennpunkt Pol ist? Führe in diese Gleichung die doppelte Ordinate des Brennpunktes — den Parameter — ein.

897. Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Axen sei $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$; transformiere die Gleichung so, dass die Hauptaxe die Axe der x und die Tangente in einem Scheitel die Axe der y ist. Scheitelgleichung der Hyperbel.

898. Wie heissen die Aufg. 793—797 für die Hyperbel?

899. Bestimme die Länge einer Normalen der Hyperbel zwischen Fusspunkt und Schnittpunkt mit der Haupt- oder Nebenaxe. Beweise Aufg. 799 und 800 für die Hyperbel.

900. Von einem Punkte mit den Koordinaten $x'y'$ die Normale an eine Hyperbel zu bestimmen (s. Aufg. 802).

901. Wie heisst Aufg. 803 für die Hyperbel?

902. Bestimme die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten und die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen in den Punkten (m, n) , (p, q) der auf die Axen bezogenen Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

903. Bestimme in der letzten Aufgabe die Koordinaten des Normalenschnittpunktes so, dass die gegebenen Koordinaten nur als Summen auftreten; lasse dann den Punkt (p, q) immer näher an (m, n) rücken und gebe dann die Koordinaten des Schnittpunktes von zwei aufeinander folgenden Normalen an. Wie gross ist der Krümmungshalbmesser der Hyperbel in dem Punkte (m, n) ? (S. Aufg. 805.)

904. Bestimme die Schnittpunkte der Hyperbel mit einem ihrer Krümmungskreise.

905. Wie heisst die Aufg. 808 für die Hyperbel?

906. Zieht man in einem Punkte P einer Hyperbel eine Normale, welche die Hauptaxe in N schneidet, so ist der Krümmungsradius gleich der dritten Potenz von PN dividiert durch das Quadrat eines zu bestimmenden Halbdurchmessers. Löse dieselbe Aufgabe für die Ellipse.

907. Bestimme für die Hyperbel oder Ellipse die Länge der Sehnen eines Krümmungskreises, welche durch den Mittel- oder Brennpunkt der Kurve gehen.

908. Die Brennpunktssehne eines Krümmungskreises für einen Punkt einer Hyperbel oder einer Ellipse ist einer Brennpunktssehne des Kegelschnittes gleich, welche parallel der Tangente in dem Punkte gezogen ist.

909. Bestimme die Evolute der Hyperbel (s. Aufg. 809).

910. Wie heisst die Aufg. 811 für die Hyperbel?

911. Übertrage die Aufg. 812—823 für die Hyperbel.

912. Gilt Satz 824 auch für die Hyperbel?

913. Bestimme die Asymptoten der auf die Hauptachsen bezogenen Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$. Diese Hyperbeln heissen *konjugierte Hyperbeln*. Wie heisst die Gleichung des Asymptotenpaares?

914. Bestimme den Winkel zwischen den Asymptoten mittelst der Excentricität e der Hyperbel.

915. Wie heisst die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten?

916. Beweise den Satz: Die Asymptoten sind den Diagonalen des Parallelogramms parallel, welches ein beliebiges Paar konjugierter Durchmesser zu seinen anstossenden Seiten hat.

917. Beweise: Der zwischen den Asymptoten liegende Teil einer Tangente an die Hyperbel wird durch den Berührungspunkt halbiert und ist dem Durchmesser, der dem nach dem Berührungspunkt gehenden konjugiert ist, gleich.

918. Eine gerade Linie schneide die Hyperbel in D_1 und D_2 und die Asymptoten in D'_1 , D'_2 ; es soll bewiesen werden, dass $D_1 D'_1 = D_2 D'_2$ ist.

919. Von einem Punkte E der Hyperbel ziehe man Parallele zu den Asymptoten, welche diese in F und G schneiden; zeige, dass der Inhalt des Parallelogramms $OFE G$ konstant ist.

920. Lege in Aufg. 919 in E eine Tangente an die Hyperbel, welche die Asymptoten in G_1 und F_1 trifft; beweise, dass der Inhalt $OG_1 F_1$ konstant ist.

921. Wenn zwei feste Punkte einer Hyperbel (x', y') , (x'', y'') mit irgend einem Punkte (x''', y''') der Hyperbel verbunden werden, so ist die Länge, welche diese Verbindungs-
linien auf jeder der beiden Asymptoten festlegen, konstant.

922. Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Asymptoten sei $xy = k^2$ und in Bezug auf die Axen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

wie bestimmt sich k mittelst a und b ?

923. Bestimme die Länge der Senkrechten vom Brennpunkte auf die Asymptote.

924. Die Entfernung eines Brennpunktes von einem Punkte der Hyperbel ist gleich der Länge, welche von der zugehörigen Direktrix auf einer durch den Punkt parallel der Asymptote gezogenen geraden Linie abgeschnitten wird.

925. Welchen Winkel schliessen die Asymptoten der *gleichseitigen Hyperbel* $x^2 - y^2 = m^2$ ein?

926. Beweise den Satz: Wenn eine Ellipse und Hyperbel dieselben Axen in Grösse und Lage haben, so fallen die Asymptoten der Hyperbel mit den gleichen konjugierten Durchmesser der Ellipse zusammen.

927. Teile mit Hilfe einer gewissen Hyperbel einen Winkel in drei gleiche Teile.

928. Welches ist der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher in zwei gegebenen geraden Linien gegebene Abschnitte macht?

929. Welches ist der Ort des Mittelpunktes eines Kreises, welcher zwei gegebene Kreise oder einen gegebenen Kreis und eine gegebene gerade Linie berührt?

930. Beweise, dass eine einem Dreieck umschriebene Hyperbel durch den Höhenschnittpunkt des Dreiecks geht.

931. Welchen Ort bestimmen die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, welche einem Dreieck umschrieben sind?

932. Wenn in einem Dreieck jede Ecke der Pol der Gegenseite in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel ist, so geht der dem Dreieck umschriebene Kreis durch den Mittelpunkt der Hyperbel.

933. Durch den Mittelpunkt einer gleichseitigen Hyperbel und durch zwei Punkte lege man einen Kreis; dieser Kreis geht auch durch den Schnittpunkt der geraden Linien, welche durch jeden dieser Punkte parallel zur Polaren des andern in Bezug auf die Hyperbel gezogen werden können.

934. Die Mittelpunkte von zwei gleichseitigen Hyperbeln, die demselben Vierseit einbeschrieben sind, sind die Punkte, welche der Verbindungslinie der Diagonalenmittelpunkte und den vier Kreisen gemeinsam sind, welche aus den Höhenschnittpunkten der vier von den Tangenten gebildeten Dreiecken so beschrieben werden, dass deren Ecken die Pole der Gegenseiten sind; die Höhenschnittpunkte liegen daher in einer geraden Linie.

935. Welche geometrische Bedeutung hat der Winkel φ , wenn man in der Gleichung der Hyperbel $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ setzt: $x = a \cdot \sec \varphi$, $y = b \tan \varphi$.

936. Bestimme die Längen zweier konjugierten Halbdurchmesser der Hyperbel durch den Winkel φ der Aufg. 935.

937. Bestimme die Gleichung einer Sehne der Hyperbel aus den Winkeln φ , φ' (s. Aufg. 829, 935).

938. Wenn man einen Punkt der zu der Hyperbel Aufgabe 935 konjugierten Hyperbel durch

$$y' = b \sec \varphi'; \quad x' = a \tan \varphi'$$

ausdrückt, so soll bewiesen werden, dass für die Endpunkte konjugierter Durchmesser $\varphi = \varphi'$ ist.

939. Beweise für die Hyperbel die Aufg. 837, 838, 839, 840, 841, 843, 844, 845, 846. Die Asymptoten von ähnlichen und ähnlich liegenden Hyperbeln sind parallel und umgekehrt.

940. Beweise den Satz: Der Winkel von zwei gleichseitigen konzentrischen Hyperbeln ist doppelt so gross als der Winkel ihrer Asymptoten.

941. Es ist eine Hyperbel in Bezug auf die Axen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und eine gerade Linie senkrecht auf die Hauptaxe in der Entfernung c vom Mittelpunkt der Hyperbel gegeben; eine gerade Linie parallel der grossen Axe schneide

die Hyperbel in den Punkten M, N und die gegebene gerade Linie im Punkte C ; auf dieser geraden Linie bestimmt man einen Punkt P derart, dass $\frac{CM}{CN} = \frac{PM}{PN}$ ist, welchen Ort beschreibt P ?

942. Löse Aufg. 941, wenn statt der Hyperbel eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist.

943. Wie bestimmt sich in Aufg. 941 und 942 der Ort von P , wenn C die gerade Linie $x = m + ny$ beschreibt?

944. Bestimme in den Aufg. 941, 942, 943 den Schnittpunkt des Ortes mit den entsprechenden Hyperbeln oder Ellipsen. Wie muss die gerade Linie $x = m + ny$ angenommen werden, damit der Ort und die Kegelschnitte eine gemeinschaftliche Tangente haben?

945. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 941 der Punkt P , wenn C die Nebenaxe durchläuft?

946. Es ist eine Hyperbel in Bezug auf die Axen $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ und eine gerade Linie $y = p + qx$ gegeben; eine gerade Linie senkrecht auf die Hauptaxe schneide die Hyperbel in den Punkten M, N und die gegebene gerade Linie im Punkte C ; welchen Ort beschreibt der Punkt P der geraden Linie MN , wenn $\frac{CM}{CN} = \frac{PM}{PN}$ ist?

947. Löse Aufg. 946, wenn statt der Hyperbel eine Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ gegeben ist.

948. Wende Aufg. 944 in der Aufg. 946 an; bestimme in Aufg. 946 den Ort von P , wenn C die Hauptaxe durchläuft.

949. Nehme in den Aufg. 941 und 946 statt der Hyperbel ein Linienpaar.

950. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 941 und 946 der Punkt P , wenn C sich auf einer geraden Linie bewegt, die einer Asymptoten parallel ist oder mit der Asymptoten zusammenfällt.

951. Welchen Ort beschreibt in der Aufg. 941 der Punkt P , wenn die Entfernung c unendlich gross wird?

952. Welchen Ort beschreibt in der Aufg. 946 der Punkt P , wenn in der Aufg. 946 $q = 0$ und p unendlich gross gesetzt wird?

Die Parabel.

953. Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte stellt eine Parabel dar, wenn ist $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0$; man kann sie also schreiben:

$$(mx + ny)^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Schliessen die Koordinaten einen Winkel w ein, so transformiere zu neuen Axen, deren Gleichungen in den alten Koordinaten

$$mx + ny = 0, \quad (n - m \cos w)x - (m - n \cos w)y = 0$$

sind. Welchen Winkel schliessen die neuen Axen ein?

954. Verschiebe in Aufg. 953 das neue Koordinatensystem so, dass die Gleichung der Parabel die Form $y^2 = px$ hat. p heisst der *Hauptparameter der Parabel* und die neue Axe der x ist *Durchmesser der Parabel*. Der Punkt $x = 0, y = 0$ heisst *Scheitel*.

955. Wie bestimmen sich in Aufg. 953 und 954 die Transformationen, wenn der Winkel zwischen den Koordinatenachsen ein rechter ist?

956. Transformiere die Gleichung in Aufg. 953 zu neuen Axen, deren Gleichungen in Bezug auf die alten Axen $mx + ny = 0$ und $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ sind.

957. Welchen Winkel schliessen in Aufg. 956 die neuen Axen ein? Nach Aufg. 499—501 bestimme die Tangente der Parabel im Schnittpunkt mit der geraden Linie $mx + ny = 0$.

958. Durch die Transformation in Aufg. 956 erhält die Parabel die Form $y^2 = p'x$; p' heisst der *Parameter des Durchmessers*, welcher zur Axe der x wurde. Diskutiere diese Gleichung der Parabel!

959. Man bestimme den Hauptparameter und den Parameter unter Voraussetzung schief- und rechtwinkliger Koordinatensysteme der Parabel:

- 1) $4x^2 + 4xy + y^2 + 8x + 7y + 9 = 0,$
- 2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2x}{a} - \frac{2y}{b} + 1 = 0,$
- 3) $x^2 + 6xy + 9y^2 + x - 6y - 9 = 0,$
- 4) $16y^2 + 24xy + 9x^2 + 8y + 11x + 7 = 0,$
- 5) $2x^2 + 8y^2 + 8xy + x + y + 3 = 0,$
- 6) $49x^2 + 14xy + y^2 + 8 = 0,$
- 7) $49x^2 + 14xy + y^2 + 2y + 14x + 1 = 0,$
- 8) $y^2 - 18x + 3 = 0,$
- 9) $x^2 + 2xy + y^2 - 2y + 3x + 1 = 0,$
- 10) $\frac{x}{a} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$
- 11) $y^2 + 8xy + 4x^2 + 6 = 0,$
- 12) $y^2 - 9x = 0.$

In welchen Punkten schneiden sich je zwei dieser Parabeln?

960. Wiederhole Aufg. 159 und bestimme die Figur der Parabel.

961. Erkläre nach Aufg. 159 und 643 den Brennpunkt und die Direktrix einer Parabel.

962. Ist der eine Scheitel einer Ellipse A der nächstliegende Brennpunkt F , die Länge der grossen Axe $2a$ und die der kleinen Axe $2b$, so ist die Scheitelgleichung der Ellipse ($AF = m$): $y^2 = \left(4m - \frac{2m^2}{a}\right)x - \left(\frac{2m}{a} - \frac{m^2}{a^2}\right)x^2$. Wie gross muss man a annehmen, wenn diese Gleichung eine Parabel darstellen soll?

963. Wie heisst die Gleichung der Sehne, welche die Punkte x', y' und x'', y'' der Parabel $y^2 = px$ (Scheitelgleichung) verbindet?

964. Wie heisst die Gleichung der Tangente im Punkte x', y' der Parabel $y^2 = px$?

965. Wie heisst die Gleichung der Tangente vom Punkte x', y' an die Parabel $y^2 = px$? Beweise, dass die Tangenten einer Parabel aus einem Punkte der Direktrix einen rechten Winkel einschliessen.

966. Wie heisst die Gleichung der Polare des Punktes x', y' in Bezug auf die Parabel $y^2 = px$?

967. Bestimme den Pol der geraden Linie $mx + ny = 1$ auf die Parabel $y^2 = px$.

968. Unter welcher Bedingung ist die gerade Linie $mx + ny = 1$ Tangente an die Parabel $y^2 = px$?

969. Nennt man den Durchmesser durch den Brennpunkt und senkrecht zur Direktrix die *Axe* der Parabel, so wird die Subtangente einer Parabel in der *Axe* durch den Scheitel halbiert.

970. Ist FL die *Axe*, F der Brennpunkt, LQ die Direktrix, PN eine Tangente in P an die Parabel und $PQ \perp LQ$, so ist zu beweisen, dass $\sphericalangle QPN = \sphericalangle FPN$?

971. Bestimme den Schnittpunkt und den Winkel von zwei Tangenten, welche die Parabel $y^2 = px$ in den Punkten x', y' und x'', y'' berührt.

972. Zieht man nach dem Schnittpunkte zweier Tangenten einer Parabel vom Brennpunkte eine gerade Linie, so bildet diese denselben Winkel mit der einen Tangente, welchen eine vom Schnittpunkte der Tangenten parallel mit der *Axe* gezogene Linie mit der anderen Tangente bildet.

973. Verbindet man die Berührungspunkte von zwei Tangenten der Parabel und ihren Schnittpunkt mit dem Brennpunkte, so halbiert die letzte gerade Linie den Winkel der beiden ersten.

974. Wie heisst die Aufg. 973, wenn die Verbindungslinie der Berührungspunkte durch den Brennpunkt geht? Welchen Winkel schliessen diese Tangenten ein?

975. Beweise, dass die Tangenten in Aufg. 974 sich auf der Direktrix schneiden.

976. Die Verbindungslinie der Berührungspunkte von zwei Tangenten wird durch die Linie, welche von ihrem Schnittpunkte parallel der *Axe* gezogen wird, halbiert.

977. Zieht man vom Mittelpunkt einer Sehne der Parabel eine Linie parallel der *Axe* und legt im Durchschnittspunkt dieser geraden Linie und der Parabel eine Tangente an dieselbe, so ist diese Tangente der Sehne parallel.

978. Legt man an den Endpunkten einer Sehne zwei Tangenten an die Parabel und zieht vom Schnittpunkt derselben eine Parallele mit der Axe, so wird das Stück dieser Parallelen, welches bis zur Sehne reicht, von dem Punkte, in welchem die Parabel von ihr geschnitten wird, halbiert. Wie folgt Satz 977 und 978 aus Aufg. 956?

979. Der Abschnitt, welchen die Polaren von zwei Punkten in der Axe bilden, ist dem Abschnitt zwischen den von diesen Punkten auf die Axen gefällten Senkrechten gleich.

980. An eine Parabel lege man eine Tangente MB und durch den Berührungspunkt eine Parallele BP mit der Axe der Parabel; MB bilde mit BP den Winkel φ ; die Scheitelformel der Parabel ist $y^2 = px$ und die Gleichung auf die Axen MB , BP ist $y^2 = p'x$. Bestimme p mittelst p' und φ .

981. Der Parameter irgend eines Durchmessers D ist dem Hauptparameter der Parabel direkt und dem Quadrat des Sinus des Winkels, welchen die Tangente im Endpunkte des Durchmessers D an die Parabel mit der Axe bilden, umgekehrt proportional.

982. Wie bestimmt sich p' in Aufg. 980 durch die Koordinaten des Berührungspunktes B in Bezug auf die Scheitelformel $y^2 = px$?

983. Bestimme die Gleichung einer durch $x'y'$ senkrecht zur Tangente $2yy' = p(x + x')$ gezogenen geraden Linie.

984. Die Subnormale eines Punktes der Parabel $y^2 = px$ ist konstant und gleich $\frac{p}{2}$.

985. Bestimme die Entfernung eines Punktes der Parabel vom Brennpunkt und beweise den Satz: Der Parameter irgend eines Durchmessers einer Parabel ist viermal so gross als die Entfernung seines Schnittpunktes mit der Parabel vom Brennpunkte (s. Aufg. 793).

986. Bestimme den Winkel, welchen eine Tangente mit der Axe macht und zeige, dass jede Tangente mit der Axe denselben Winkel einschliesst wie mit dem Brennstrahl des Berührungspunktes.

987. Bestimme die Länge der vom Brennpunkt auf eine Tangente gefällten Senkrechten 1. durch die Koordinaten des

Berührungspunktes, 2. durch den Winkel, den die Tangente mit der Axe bildet.

988. Fälle vom Brennpunkt auf die Tangenten der Parabel Perpendikel; welchen Ort bestimmen die Fusspunkte der Perpendikel?

989. Bestimme die Gleichung der Parabel, wenn die Direktrix und die Axe Koordinatenachsen sind.

990. Wenn eine Sehne AB die Direktrix in C schneidet, F der Brennpunkt der Parabel ist, so halbiert die gerade Linie FC den Nebenwinkel von AFB .

991. Schneidet eine veränderliche Tangente der Parabel zwei feste Tangenten, so ist der Winkel, unter dem der zwischen den festen Tangenten liegende Teil der veränderlichen Tangente vom Brennpunkt aus erscheint, der Nebenwinkel des Winkels, den die festen Tangenten einschliessen.

992. Sind a und b die Längen zweier Tangenten einer Parabel, welche aufeinander senkrecht stehen und m gleich ein viertel des Parameters, so soll gezeigt werden, dass

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{4}{3}}} + \frac{b^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}} = m^{-\frac{2}{3}} \text{ ist.}$$

993. Beweise, dass der Kreis, welcher dem von irgend drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreieck umgeschrieben ist, durch den Brennpunkt geht.

994. Leite die Polargleichung der Parabel für den Brennpunkt als Pol ab.

995. Bestimme die Länge einer Normalen der Parabel zwischen Fusspunkt und der Axe.

996. Von einem Punkte mit den Koordinaten x', y' die Normalen an eine Parabel zu bestimmen.

997. Bestimme die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten und die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Normalen in den Punkten (m, n) , (p, q) der auf die Axe bezogenen Parabel $y^2 = px$.

998. Bestimme in der letzten Aufgabe den Krümmungsradius in dem Punkte (m, n) . (S. Aufg. 805, 903.)

999. Bestimme die Schnittpunkte der Parabel mit einem ihrer Krümmungskreise.

1000. Wie heisst Aufg. 808 für die Parabel?

1001. Löse Aufg. 906 für die Parabel.

1002. In der Parabel ist die Brennpunktssehne des Krümmungskreises dem Parameter des durch den Punkt gehenden Durchmessers gleich.

1003. Bestimme die Gleichung der Evolute der Parabel $y^2 = px$. $[27py^2 = 16\left(x - \frac{p}{2}\right)^3]$ Neilsche oder semikubische Parabel.]

1004. Beweise, dass die Parabel, deren Gleichung ist

$$(a_{12}x + a_{22}y)^2 + 2a_{13}a_{22}x = 0$$

mit dem Kegelschnitt

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0$$

eine doppelte Berührung hat im Anfangspunkt der Koordinaten.

1005. Bestimme in Aufg. 941 die Grösse c so, dass die beiden Kurven eine doppelte Berührung haben; ebenso in Aufg. 943 die Grössen m und n so, dass beide Kurven eine doppelte Berührung in einem Punkte haben.

1006. An eine Parabel lege man eine Tangente; verbinde den Berührungspunkt mit dem Scheitel durch eine gerade Linie L ; fälle vom Brennpunkt eine Senkrechte auf die Tangente; es soll der Ort des Schnittpunktes dieser Senkrechten mit der geraden Linie L bestimmt werden.

1007. In einem Punkte der Parabel lege man eine Normale; verbinde den Fusspunkt mit dem Scheitel durch eine gerade Linie L ; fälle vom Brennpunkt eine Senkrechte auf die Normale; es soll der Ort des Schnittpunktes dieser Senkrechten mit der geraden Linie L bestimmt werden.

1008. Drei Tangenten einer Parabel bilden ein Dreieck; welchen Ort bestimmt der Höhenschnittpunkt des Dreiecks?

1009. Bestimme den Ort des Schnittpunktes der Normalen in den Schnittpunkten der Parabel mit den durch einen gegebenen Punkt (m, n) gehenden geraden Linien.

1010. Bestimme den Ort des Fusspunktes der Senkrechten, welche vom Brennpunkt einer Parabel auf die Tangente gefällt wird.

1011. Bestimme den Ort des Fusspunktes der Senkrechten, welche vom Brennpunkt einer Parabel auf die Normale gefällt wird.

1012. Der Inhalt des durch drei Tangenten einer Parabel gebildeten Dreiecks ist die Hälfte von dem, welches die Berührungspunkte zu Ecken hat.

1013. Einer Parabel sei ein Dreieck eingeschrieben; wie gross ist der Radius des dem Dreieck um- resp. eingeschriebenen Kreises?

1014. Drei Tangenten einer Parabel bestimmen ein Dreieck; wie gross ist der Radius des dem Dreieck umgeschriebenen Dreiecks, wenn die Tangenten mit der Hauptaxe die Winkel φ' , φ'' , φ''' bilden?

1015. Bestimme den Ort der Schnittpunkte der Tangenten einer Parabel, welche einen gegebenen Winkel einschliessen.

1016. Wie bestimmt sich in Aufg. 1015 der Ort, wenn der Winkel ein rechter ist?

1017. Bestimme den Ort der Schnittpunkte der Normalen einer Parabel, welche einen gegebenen Winkel einschliessen.

1018. Wie bestimmt sich in Aufg. 1017 der Ort, wenn der Winkel ein rechter ist?

1019. Aus den Längen zweier Tangenten a und b und dem eingeschlossenen Winkel φ soll der Hauptparameter bestimmt werden.

1020. Bestimme den Ort des Durchschnittspunktes der Normalen der Parabel, wenn gegeben ist das Produkt der Sinus der Winkel, die sie mit der Axe bilden.

1021. Bestimme den Ort des Durchschnittspunktes der Tangenten der Parabel, wenn gegeben ist das Produkt der Sinus der Winkel, die sie mit der Axe bilden.

1022. Wie ändert sich in den Aufg. 1020 und 1021 der Ort, wenn statt des Produktes der Sinus gegeben ist: 1. Produkt der Tangenten; 2. die Summe oder 3. die Differenz der Kotangenten der Winkel, die sie mit der Axe bilden.

1023. Es ist eine Parabel in Bezug auf die Axe und den Scheitel gegeben $y^2 = px$ und eine gerade Linie $y = p_1 + q_2 x$; eine gerade Linie parallel der Direktrix schneide die Parabel in den Punkten M , N und die gegebene gerade Linie im

Punkte C ; auf der geraden Linie MN bestimme man einen Punkt P derart, dass $\frac{CM}{CN} = \frac{PM}{PN}$ ist; welchen Ort beschreibt P ?

1024. Welchen Ort beschreibt in Aufg. 1023 der Punkt P , wenn die gerade Linie MN der geraden Linie $y = ax + b$ parallel geht?

1025. Beweise für die Parabel die Aufg. 837—841; 843—846. Parabeln sind ähnlich und ähnlich gelegen, deren Axen dieselbe Richtung haben.

Vermischte Aufgaben.

1026. Die Basisecken eines Dreiecks bewegen sich längs eines gegebenen Kegelschnittes, während die Seiten einen anderen Kegelschnitt berühren; welchen Ort beschreibt die Spitze des Dreiecks?

1027. Ein Dreieck ist einem Kegelschnitte eingeschrieben und zwei seiner Seiten berühren einen Kegelschnitt; welchen Ort beschreibt die dritte Seite?

1028. Es ist ein Kegelschnitt mit einem Brennpunkt F gegeben; man ziehe eine Sehne, welche den Kegelschnitt in A und B schneidet; welchen Ort hüllt die gerade Linie AB ein, wenn $\sphericalangle AFB$ konstant ist.

1029. Wenn zwei Kegelschnitte K_1 und K_2 ihre gemeinschaftlichen Tangenten A, B, C, D in den Punkten $a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ berühren, so hat ein Kegelschnitt K_3 , der durch die Punkte a, b, c geht und D in d_1 berührt, zur zweiten Durchschnichtssehne mit K_2 die gerade Linie, welche die Schnittpunkte von A mit bc , B mit ca , C mit ab verbindet.

1030. Es seien A', B', C' die Berührungspunkte eines einem gegebenen Dreieck eingeschriebenen Kreises, A, B, C die Mittelpunkte der Seiten, in welchen diese Seiten eine Ellipse berühren; wenn die vierte gemeinschaftliche Tangente des Kreises und der Ellipse jenen in D' berührt, so berührt der durch die Mittelpunkte der Seiten gehende Kreis in D' . Beweise mit Hilfe des Paskalschen Sechsecks, dass man dem Dreieck einen Kegelschnitt ABC einschreiben kann.

1031. Durch vier feste Punkte lege man alle möglichen Kegelschnitte; welchen Ort bestimmt deren Brennpunkt?

1032. Bestimme den Ort der Brennpunkte von den einem festen Viereck eingeschriebenen Kegelschnitten.

1033. Bestimme durch die Methode der reziproken Radien die Inverse des Kegelschnittes:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

in Bezug auf 1. den Koordinatenursprung, 2. einen Punkt auf dem Kegelschnitt, 3. den Mittelpunkt des Kegelschnittes, 4. den Scheitel der Kegelschnitte, 5. den Brennpunkten; bestimme in der allgemeinen Gleichung die Koordinaten der Brennpunkte (s. Aufg. 449).

1034. Unter welchen Bedingungen ist die Inverse des Kegelschnittes in Aufg. 1033: 1. eine doppelte gerade Linie, 2. ein Punkt, 3. zwei parallele gerade Linien, 4. zwei sich schneidende gerade Linien, 5. eine Ellipse, 6. eine Hyperbel, 7. eine Parabel?

1035. A, B, C, D sind die Fusspunkte von vier durch einen Punkt P gehenden Normalen einer gegebenen Ellipse; der Punkt P bewege sich so, dass die Sehne AB eine gegebene Richtung beibehält; es soll der Ort der Mittelpunkte der um die Dreiecke ABC und ABD beschriebenen Kreise bestimmt werden.

1036. Es ist ein Kegelschnitt in Bezug auf seine Axen durch die Gleichung $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ und ein Punkt M auf diesen Kegelschnitt gegeben; durch die Endpunkte eines Durchmessers und dem Punkte M gehe ein Kreis; welchen Ort S beschreibt der Mittelpunkt dieses Kreises?

1037. In der Aufgabe 1036 kann man, durch den Ursprung der Axen unabhängig von der Normalen, welche ihren Fusspunkt im Ursprung der Axen hat, drei andere Normalen an den Ort S ziehen; es soll gezeigt werden, dass in dem Falle $a = -b = 1$ nur eine Normale reell ist und es soll im allgemeinen Fall die Gleichung des Kreises gefunden werden, welcher durch die Fusspunkte der Normalen geht.

1038. Zwei rechtwinklige gerade Linien OX, OY sind die Axen einer Ellipse; M ist ein Punkt der Ellipse, N der

Schnittpunkt der Normalen in M mit der geraden Linie OX ; MQ das Perpendikel von M auf OY ; MNP ein Dreieck, dessen Seiten bezüglich gleich sind MQ , NO . Wenn man auf der Halbierungslinie des Winkels MPN nach jeder Seite gleiche Entfernungen abschneidet PD , PD' , so dass ist $PD^2 = MP \times PN$, so schneidet der Kreis, welcher durch D , D' geht und seinen Mittelpunkt auf OY hat, die Axe OX in den beiden Brennpunkten der Ellipse.

1039. Seien M und N die Schnittpunkte der Axe der x mit dem Kreis $x^2 + y^2 = r^2$; nimmt man irgend eine der gleichseitigen Hyperbeln, welche durch die Punkte M und N gehen; zieht man durch einen willkürlichen Punkt auf dem Kreis Tangenten an die Hyperbel, verbindet die Berührungspunkte durch eine gerade Linie, welche den Kreis in den Punkten A und B schneidet. Es ist zu beweisen, dass von den beiden geraden Linien QA und QB die eine einer festen geraden Linie parallel ist und die andere durch einen festen Punkt P geht.

1040. In der Aufgabe 1039 sei der feste Punkt P bestimmt und die entsprechende durch M und N gehende Hyperbel, deren Mittelpunkt, Asymptoten und Scheitel zu bestimmen sind. Welchen Ort beschreibt ein Brennpunkt der Hyperbel, wenn P die gerade Linie $y = x$ beschreibt?

1041. Seien A , B , C , D vier Punkte eines Kegelschnittes und M ein beliebiger Punkt, zieht man die geraden Linien MA , MB , MC , MD , welche den Kegelschnitt in den Punkten A' , B' , C' , D' schneiden, so haben die Kegelschnitte $MABCD$ und $M'A'B'C'D'$ eine durch M gehende gemeinsame Tangente.

1042. Es ist eine Parabel P gegeben; es ist die Gleichung des Kreises K zu finden, welcher durch einen Punkt M geht und durch die Berührungspunkte der Tangenten von M an die Parabel; ferner sei zu beweisen, dass die Polare von M in Bezug auf die Parabel und die eine dem Kreis und der Parabel gemeinschaftliche Sehne sich auf einer festen geraden Linie schneiden.

1043. Es sind zwei rechtwinklige Axen OX und OY gegeben, auf OX ein Punkt A , auf OY ein Punkt B . Man betrachte alle gleichseitigen Hyperbeln, welche durch A gehen

und die Axe OY im Punkte B als Tangente haben. Wie heisst die Gleichung dieser Hyperbeln?

1044. In der Aufgabe 1043 nehme man eine der Hyperbeln, ziehe von A eine Tangente an sie, ziehe durch den Ursprung gerade Linien parallel den Asymptoten, welche diese Tangente in P schneiden; welchen Ort P beschreibt dieser Schnittpunkt, wenn man die Konstruktion an allen Hyperbeln macht? Bestimme den Ort des Scheitels von P , wenn B fest bleibt und A die gerade Linie OX beschreibt.

1045. Man umschreibt einer gegebenen Ellipse ein Dreieck, welches zu Höhen die geraden Linien hat, welche die Ecken mit den Berührungspunkten verbinden; es sei der Ort der Ecken des Dreiecks und der Ort des Schnittpunktes der Höhen zu bestimmen.

1046. Ein Kegelschnitt ist einem Dreieck einbeschrieben; die Summe der Quadrate der Axen ist konstant, welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt des Kegelschnittes?

1047. Es ist ein Kegelschnitt S und ein fester Punkt A auf ihm, eine gerade Linie D und ein fester Punkt a in ihr gegeben. Ein den Kegelschnitt S im Punkte A oskulierender und durch den Punkt a gehender Kegelschnitt schneidet S und D in den Punkten b und c ; es soll bewiesen werden, dass die gerade Linie bc durch einen festen Punkt f auf S geht.

1048. Es seien A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 drei Durchmesser von drei Kreisen, welche O zum Radikalcentrum haben; M sei ein beliebiger Punkt; OB_1D_1 , OB_2D_2 , OB_3D_3 drei mit den Dreiecken OMA_1 , OMA_2 , OM_3 symmetrisch ähnliche Dreiecke; auf welchem Orte liegen die Punkte $D_1D_2D_3$?

1049. Es ist die Gleichung der Parabeln zu bestimmen, welche durch zwei gegebene Punkte A und B gehen und deren Durchmesser eine gegebene Richtung haben; ferner sind die Koordinaten der Scheitel und der Brennpunkte zu bestimmen; man ziehe an jede Parabel eine auf der geraden Linie AB senkrecht stehende Tangente, es ist der Ort der Berührungspunkte zu bestimmen.

1050. Es ist der geometrische Ort des Punktes zu finden, dessen Entfernung von einer festen geraden Linie zur Entfernung von einem festen Kreise in konstantem Verhältnisse steht.

1051. Seien OX, OY zwei rechtwinklige Axen, und auf OX ein Punkt A , auf OY ein Punkt B . Man zieht durch den Punkt eine gerade Linie M , deren Gleichung ist: $y = m(x - a)$. Es ist zu bestimmen die Gleichung der Hyperbel H , welche die Axe OX im Punkte O zur Tangente hat, durch den Punkt B geht und für welche die gerade Linie M Asymptote ist. Man lasse m variieren und es ist der Ort des Schnittpunktes der Tangente in B mit der Asymptote M zu bestimmen.

1052. In der Aufgabe 1051 beschreibe man um das Dreieck AOB einen Kreis, welcher die Hyperbel H in den Punkten O und B und in zwei anderen Punkten P und Q trifft. Man bestimme die Gleichung von PQ , lasse m sich ändern und suche den Ort des Schnittpunktes der geraden Linie PQ mit einer durch O zu einer der Asymptoten parallel gezogenen geraden Linie.

1053. Die Gleichung einer Ellipse sei $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$; ein Punkt P habe die Koordinaten α, β . Es ist zu beweisen, dass die Fusspunkte der von P an die Ellipse gezogenen Normalen auf einer Hyperbel liegen. Legt man durch die Schnittpunkte der Ellipse und Hyperbel alle Kegelschnitte, zieht den zu OP konjugierten Durchmesser und fällt von O ein Perpendikel OR auf diesen Durchmesser, welchen Ort beschreibt R ?

1054. In der Aufgabe 1053 kann man durch die vier Schnittpunkte der Kegelschnitte zwei Parabeln legen; welchen Ort beschreiben die Scheitel dieser Parabeln, wenn P sich auf der geraden Linie $y = mx$ bewegt? Wie heisst die Gleichung des Ortes, wenn ist $m = \frac{a^3}{b^3}$, $m = -\frac{a^3}{b^3}$?

1055. Es ist ein Quadrat $PQP'Q'$ und dessen halbe Diagonale $OP = OQ = n$ gegeben. Man soll die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte bestimmen, welche die Seiten des Quadrates zu Tangenten haben. Man nehme irgend eine der eingeschriebenen Ellipsen; auf der Halbaxe OA , als Hypotenuse, konstruiere man ein rechtwinkliges Dreieck OAS , dessen Seite AS eine konstante Länge K hat; auf der Richtung OA nehme man eine Länge $OS' = OS''$ und man konstruiere eine gleichseitige Hyperbel, welche ihren Scheitel in S und ihren

Mittelpunkt in O hat; diese Hyperbel schneide die Ellipse in M . Welchen Ort beschreibt M , wenn man die Ellipse nach den Bedingungen sich ändern lässt?

1056. Zwei gegebene Kreise schneiden sich in den Punkten A und B . Durch diese beiden Punkte lege man einen beliebigen Kegelschnitt S , der jeden von den beiden Kreisen berührt; die gleichseitige Hyperbel, welche A und B zu Scheiteln hat, schneide den Kegelschnitt in den ferneren Punkten CD . Es ist zu beweisen, dass die gerade Linie CD durch einen Ähnlichkeitspunkt der beiden Kreise geht, dass der Ort der Mittelpunkte der gegebenen Kreise zwei Kreise K_1 und K_2 darstellt.

1057. Giebt es in der Aufgabe 1056 einen Kegelschnitt S , dass sein Mittelpunkt auf K_1 oder K_2 liegt? Wenn dies der Fall ist, so ist zu beweisen, dass die Asymptoten dieses Kegelschnittes einen der Kreise K_1, K_2 in zwei festen Punkten schneiden, welche auf der Radikalaxe der gegebenen Kreise liegen.

1058. Ein Kegelschnitt ist einem Dreieck ABC eingeschrieben; durch die Ecken des Dreiecks ziehe man die geraden Linien AA', BB', CC' , welche durch einen Punkt O gehen und die Seiten des Dreiecks in A', B', C' treffen; von A', B', C' aus ziehe man Tangenten an den Kegelschnitt, welche die geraden Linien $B'C', C'A', A'B'$ in den Punkten a, b, c schneiden. Es ist zu zeigen, dass diese drei Punkte in gerader Linie liegen.

1059. Durch irgend einen Punkt M einer Hyperbel ziehe man zu den Asymptoten parallele Linien; durch einen andern Punkt A auf der Hyperbel lege man zwei Kreise, welche die Asymptoten zu Tangenten haben und deren Mittelpunkte sich auf der Hauptaxe befinden; man zeige, dass die beiden geraden Linien durch M und die beiden Kreise ein und denselben Kreis berühren.

1060. Zwei feste Kreise K und K' berühren die geraden Linien L und L' ; ein veränderlicher Kreis C berühre K und K' , und man ziehe an ihm zwei Tangenten parallel L und L'' , welche sich in M schneiden; es ist der Ort von M zu finden.

1061. Es ist $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ die Gleichung einer Ellipse in Bezug auf die Axen; m, n die Koordinaten eines Punktes P in der Ebene. Man bestimme die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte, welche durch die Berührungspunkte M und M' der von P an die Ellipse gezogenen Tangenten gehen und mit der Ellipse die Schnittpunkte mit der geraden Linie $\frac{mx}{a^2} - \frac{ny}{b^2} + p = 0$ gemein hat. In der allgemeinen Gleichung der Kegelschnitte seien die Konstanten und p so zu bestimmen, dass sie eine durch P gehende gleichseitige Hyperbel darstellt.

1062. In der Aufgabe 1061 lasse man den Punkt P auf der geraden Linie $x + y = l$ sich bewegen und bestimme den Ort des Schnittpunktes der Senkrechten vom Mittelpunkt der Ellipse auf die gerade Linie QQ' mit der geraden Linie QQ' .

1063. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1062 der Schnittpunkt der geraden Linien MM' und QQ' ? Es soll bewiesen werden, dass dieser Ort durch zwei feste Punkte geht, welchen Wert auch l hat. Für welche Werte von l stellt dieser Ort zwei gerade Linien dar?

1064. In eine Parabel ist ein Polygon derart eingeschrieben, dass die Projektionen seiner Seiten auf die Direktrix gleich sind. Man zieht durch jede Ecke des Polygons eine Parallele L zur Axe der Parabel, dann verlängert man alle Seiten des Polygons, bis sie die erste Parallele L treffen. Es soll bewiesen werden, dass alle so erhaltenen Segmente gleich sind.

1065. Eine Ellipse habe die Halbaxen OA und OB ; mit dieser Ellipse haben zwei Kreise mit den Radien $r = OB, R$ denselben Mittelpunkt. Eine gerade Linie durch den Mittelpunkt schneidet die Kreise r, R in den Punkten C, D , durch welche man im Sinne von O nach A zu OA parallele gerade Linien zieht. Die eine Parallele schneide die Ellipse in E ; die andere trifft die Normale der Ellipse in E in einem Punkte F ; welches ist der Ort vom Punkte F ?

1066. Es ist ein fester Kegelschnitt gegeben und zwei Punkte A, A' , welche auf einer Tangente an dem Kegelschnitte

liegen. Durch A' ziehe man eine zweite Tangente, welche den Kegelschnitt in D berührt; man ziehe die gerade Linie AD , welche den Kegelschnitt in E trifft, dann die gerade Linie $A'E$, welche den Kegelschnitt in F schneidet, und zuletzt die gerade Linie AF , welche mit dem Kegelschnitt den Punkt G gemein hat. Es ist zu beweisen, dass die Tangente an den Kegelschnitt im Punkte G und die gerade Linie $A'EF$ sich in einem Punkte schneiden, der auf der zweiten durch A gehenden Tangente an dem Kegelschnitte liegt.

1067. Es seien OX, OY rechtwinklige Koordinatenachsen; der Punkt H habe die Koordinaten (a, b) , der Punkt H' liege zu H in Bezug auf O symmetrisch. Durch O ziehe man eine gerade Linie DOE , welche mit OX einen Winkel $DOX = \varphi$ bildet; man projiziere senkrecht die Punkte H, H' auf DE und erhält die Projektionen h, h' . Es sei u der auf OX senkrecht projizierte Punkt h , u_1 der auf DE senkrecht projizierte Punkt u . Man projiziere h' in v auf OY und v in v_1 auf DE . Man konstruiere über u_1v_1 als Hypotenuse ein rechtwinkliges Dreieck u_1v_1S , indem $v_1S \parallel OX$ und $u_1S \parallel OY$. Man soll die Koordinaten des Punktes S durch a, b, φ bestimmen. Wie heisst die Gleichung einer Parabel, welche S zum Scheitel und die gerade Linie DE zur Direktrix hat?

1068. Welchen Ort beschreibt der Brennpunkt der Parabel der Aufgabe 1067, wenn φ sich ändert? Beweise, dass die Parabeln die Axen zu Tangenten haben und dass die Sehnen, welche die Berührungspunkte auf den Axen verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

1069. Es ist gegeben eine Asymptote und ein Punkt P einer Hyperbel. Von dem Punkte P fälle man ein Perpendikel auf die Asymptote; diese Senkrechte durchlaufe der eine Brennpunkt F , zu welchem die Direktrix D gehört. Die Direktrix schneide die andere Asymptote in M ; welchen Ort beschreibt der Punkt M ?

1070. Es ist eine Parabel $y^2 = 2px$ in Bezug auf ihren Scheitel und ihre Axe gegeben, und ein Punkt P der Ebene habe die Koordinaten α, β . Es ist zu beweisen, dass man im allgemeinen von P drei Normalen an die Parabel ziehen

kann; es sei die Gleichung dritten Grades zu bestimmen, welche die Fusspunkte der Normalen A, B, C giebt.

1071. In der Aufgabe 1070 soll die allgemeine Gleichung aller Kegelschnitte aufgestellt werden, welche durch die Punkte A, B, C, P gehen, und bewiesen werden, dass unter diesen Kegelschnitten folgende zwei:

$$xy + (p - \alpha)y - p\beta = 0,$$

$$y^2 + 2x^2 - \beta y - 2\alpha x = 0$$

enthalten sind. Es sollen die Schnittpunkte dieser Kegelschnitte mit der gegebenen Parabel bestimmt werden.

1072. Durch den Scheitel der Parabel $y^2 = 2px$ ziehe man zwei gerade Linien parallel den Asymptoten eines der in der Aufgabe 1071 auftretenden Kegelschnittes, von denen Geraden jede den genannten Kegelschnitt in einem endlichen Punkte E, F schneidet; die gerade Linie EF schneide die gerade Linie DD' , welche der Axe der x parallel ist, in einem Punkte R ; welches ist der Ort der Punkte R ?

1073. Es ist gegeben ein Kegelschnitt, zwei feste Axen, welche durch einen Brennpunkt gehen und einen bestimmten Winkel φ einschliessen. Man lässt um den Kegelschnitt eine Tangente sich bewegen, welche die festen Axen bezüglich in den Punkten A, A' trifft; von den Punkten A und A' ziehe man die andern Tangenten an den Kegelschnitt; diese letzteren Tangenten schneiden sich in Punkten P , deren geometrischer Ort bestimmt werden soll.

1074. Von zwei gegebenen Punkten, auf der Axe der y gelegen und gleichweit vom Ursprung entfernt, ziehe man die Tangenten an den Kegelschnitt $bx^2 + ay^2 + 2hxy - 2y = 0$; es ist zu beweisen, dass die Schnittpunkte dieser Tangenten auf dem Kegelschnitte $bx^2 + hyx - y = 0$ liegen.

1075. OA und OB sind zwei feste gerade Linien; im Punkte O ist OA eine Tangente an eine veränderliche Ellipse, welche in diesem Punkte einen konstanten Krümmungsradius hat und deren Brennpunkt auf der geraden Linie OB sich bewegt. Durch welchen festen Punkt geht die grosse Axe der Ellipse?

1076. Durch zwei Punkte einer gegebenen Ellipse legt man einen Kreis; man zieht an beide Kurven die gemeinschaftlichen Tangenten; welchen Ort bestimmt der Schnittpunkt dieser Tangenten?

1077. Eine gerade Linie SA bewegt sich um den Scheitel S einer Parabel und A sei ein Punkt der Parabel; von A fälle man ein Perpendikel AP auf die Scheiteltangente; die Axe der Parabel schneide die Direktrix in D . Man verbinde den Punkt P mit D durch eine gerade Linie, welche AS in M schneidet. Welchen Ort beschreibt M ?

1078. Verbindet man in der Aufgabe 1077 P mit dem Brennpunkte der Parabel durch eine gerade Linie, welche AS in N schneidet, welchen Ort beschreibt N ?

1079. Von einem gegebenen Punkte M ziehe man die Normalen an einen Kegelschnitt; seien A_i, A_j die Fusspunkte von zwei dieser Normalen; a_{ij} der Fusspunkt des von M auf die Sehne $A_i A_j$ gefällten Perpendikel, und b_{ij} ein Punkt derart, dass a_{ij}, b_{ij} durch die Punkte A_i, A_j harmonisch getrennt sind. Wieviel Punkte b_{ij} giebt es und welche Figur, deren Ecken sie sind, bestimmen sie?

1080. Von einem Punkte M ziehe man zwei Normalen an eine Parabel. A, B sind der Normalen Fusspunkte, P_1 der Fusspunkt des vom Punkte M auf die gerade Linie AB gefällten Perpendikel, P_2 ein solcher Punkt, dass die Punkte A, B durch die Punkte P_1, P_2 harmonisch getrennt sind. Es ist zu beweisen, dass der Punkt P_2 auf dem von M auf die Parabelaxe gefällten Perpendikel liegt.

1081. Es ist ein Viereck $ABCD$, in welchem $AB = BC$, $CD = AD$ ist, gegeben. Welchen Kreisen ist dies Viereck umschrieben?

1082. Ein Viereck $ABCD$, in welchem $AB = BC$, $CD = AD$ ist, ändert sich so, dass A, B feste Punkte und die Längen der Seiten unveränderlich bleiben. Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt der einbeschriebenen Kreise?

1083. Zwei gerade Linien g, g' enthalten zwei Reihen entsprechender Punkte $A, B, C, D, E \dots$ und A', B', C', D', E' ; die geraden Linien $AA', BB', CC' \dots$ umhüllen einen Kegelschnitt; welchen Ort beschreibt die Mitte dieser geraden Linien?

1084. Es ist O ein fester Punkt in der Ebene des Kreises PQR , und OPQ eine Sekante, auf welcher man einen Punkt S derart nimmt, dass ist $OS = b \cdot OP + m \cdot OQ$ (m und n konstant). Fällt man von S Perpendikel auf PQ , welchen Ort umhüllen diese Perpendikel?

1085. Von einem Punkte M zieht man drei Normalen an einen Kegelschnitt; P sei der Schnittpunkt der Höhen des durch die Normalen-Fusspunkte gebildeten Dreiecks. Es ist zu zeigen, dass die gerade Linie OP und die vierte Normale, welche man von M an die Kurve ziehen kann, gegen die Axe gleiche Neigung haben.

1086. Wie heisst die Aufgabe 1085, wenn der Kegelschnitt eine gleichseitige Hyperbel ist? In welchem Punkte schneidet OP die vierte Normale?

1087. In einem Punkte M eines gegebenen Kegelschnittes konstruiert man die oskulierende Parabel und nimmt den Punkt P symmetrisch zum Parabelbrennpunkt in Bezug auf die Tangente in M . Es ist zu beweisen, dass der Punkt M und sein in Bezug auf P symmetrischer Punkt N reziprok sind in Bezug auf den Kreis, welcher der Ort des Scheitels der um den Kegelschnitt beschriebenen rechten Winkel ist, d. h. es ist $OM \cdot ON = R^2$, wenn R der Radius und O der Mittelpunkt des Kreises ist.

1088. Es sind eine Ellipse und eine Hyperbel mit denselben Brennpunkten gegeben; man nehme irgend einen Kegelschnitt, der jeden der beiden Kegelschnitte doppelt berührt; in den betreffenden Berührungspunkten ziehe man die Tangenten, welche sich in M schneiden; welchen Ort beschreibt M ?

1089. Die Gleichung einer Hyperbel in Bezug auf ihre Axen ist $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, und ein Punkt der Ebene hat die Koordinaten (m, n) . Durch den Punkt (m, n) legt man die Tangenten an die Hyperbel, welche die Berührungspunkte A und B haben. Es ist die Gleichung des Kreises zu bestimmen, welcher durch die Punkte A, B und den Mittelpunkt der Hyperbel geht. Dieser Kreis schneidet die Hyperbel in C und D ; welche Gleichung hat die gerade Linie CD ? Beschreibt der Punkt (m, n) eine gerade Linie, so entsprechen

den verschiedenen Lagen von (m, n) verschiedene Lagen der Geraden CD . Von dem Mittelpunkte der Hyperbel fälle man eine Senkrechte auf CD und man erhält den Fusspunkt R auf dieser geraden Linie; welchen Ort beschreibt R ?

1090. Man beschreibe um ein in A rechtwinkliges Dreieck ABC Kegelschnitte derart, dass die Tangenten in B und C an die Kegelschnitte sich auf der Höhe des Dreiecks schneiden. Welchen Ort bestimmt der Durchschnittspunkt der Normalen in B und C an diese Kegelschnitte?

1091. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1090 der Mittelpunkt der Kegelschnitte? Welchen Ort beschreibt der Pol irgend einer geraden Linie, in Bezug auf die Kegelschnitte?

1092. Es ist AOB ein in O rechtwinkliges Dreieck. Man betrachte alle Hyperbeln, welche durch A und B gehen und deren Asymptoten OA und OB parallel laufen. Wie heisst die allgemeine Gleichung dieser Hyperbeln? Welchen Ort beschreibt der Scheitel dieser Hyperbeln?

1093. In der Aufgabe 1092 nehme man auf dem gefundenen geometrischen Orte einen Punkt P und die Hyperbel, deren Scheitel P ist. Wie liegt P , wenn A und B demselben Ast oder verschiedenen Ästen der Hyperbel angehören?

1094. Es ist ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ gegeben, dessen Höhe gleich $2h$, die halbe Summe der Basen gleich $2a$ und die Basiswinkel gleich α . Man bilde die allgemeine Gleichung aller um das Trapez beschriebenen Kegelschnitte. Es sei der Ort der Berührungspunkte der Tangenten zu finden, welche BC parallel laufen.

1095. In der Aufgabe 1094 sei der Ort bestimmt; man nimmt auf diesem Orte einen Punkt P , welche Gleichung hat der Kegelschnitt, welcher durch $ABCDP$ geht?

1096. Man zieht zwei rechtwinklige Axen, welche sich in O schneiden und eine gerade Linie L , welche diese Axen in A und B trifft. Es soll der Ort des Poles von L in Bezug auf die Kegelschnitte bestimmt werden, welche diese gerade Linie unter einem rechten Winkel schneiden und deren Axen OA und OB parallel sind.

1097. Der Mittelpunkt eines Kreises O von konstantem Radius bewegt sich auf dem festen Kreise O' . Es soll der Ort der Polaren eines festen Punktes in Bezug auf den Kreis O bestimmt werden.

1098. Zwei gleichlange gerade Linien OA und OB und ein Punkt P sind gegeben; eine bewegliche gerade Linie durch P schneidet OA in A_1 und OB in B_1 . Man beschreibe zwei Kreise, welche A_1 und B_1 zu Mittelpunkten haben und resp. durch A und B gehen. Welchen Ort beschreiben die gemeinschaftlichen Punkte dieser Kreise?

1099. Ein Punkt F ist durch seine Koordinaten a, b in Bezug auf die Axen OX, OY , welche den Winkel φ bilden, gegeben. Es soll die Gleichung der Hyperbeln bestimmt werden, welche durch O gehen, F zum Brennpunkt haben und deren Asymptoten den Axen OX, OY parallel sind. Die Gleichung der Hyperbeln soll in die Form $xy - mx - ny = 0$ gebracht werden und m, n mittelst a, b, φ bestimmt werden.

1100. Ein Punkt und eine gerade Linie sind gegeben; ein Kreis mit veränderlichem Radius geht durch diesen Punkt und hat die gegebene gerade Linie zur Tangente; die Tangente an dem Kreise, welche senkrecht auf der gegebenen geraden Linie steht, hat den Berührungspunkt M . Welchen Ort beschreibt M ?

1101. Es ist ein Kegelschnitt und auf ihm zwei feste Punkte A, B gegeben. Irgend ein Kreis geht durch A und B und schneidet den Kegelschnitt ausserdem in C und D . Man ziehe AC, BD , welche sich in M schneiden, ferner die geraden Linien AD, BC , deren Durchschnitt N ist. Es ist der Ort von M und N zu bestimmen.

1102. Man beschreibt alle den Kegelschnitt K im Punkte B einfach berührenden Kreise. An jeden dieser Kreise zieht man Tangenten parallel zwei festen Durchmessern der ~~Kreise~~ ^{Kegelschnitt}. Es soll der geometrische Ort der Durchschnitte dieser Tangenten bestimmt werden.

1103. Eine Parabel P mit konstantem Parameter bewegt sich in ihrer Ebene parallel derart, dass jeder Parabelpunkt eine Parabel P' mit bekanntem Parameter und einer Axe, welche der Axe der beweglichen Parabel parallel ist, beschreibt.

In einem festen Punkte R bestimme man die Polare in Bezug auf die Parabel P . Welchen Ort hüllt diese Polare ein?

1104. Welchen Ort bestimmt in der Aufgabe 1103 die Polare, wenn P' zu einer geraden Linie wird?

1105. Es sind zwei Punkte P, P' auf dem Kreise S um das Dreieck ABC gegeben. Von P und P' fälle man Perpendikel auf die Dreiecksseiten, deren Fusspunkte in zwei geraden Linien liegen. Es sei zu zeigen, dass der Schnittpunkt dieser geraden Linien einen Kreis S' beschreibt, wenn C sich auf S bewegt und die Punkte A, B, P, P' fest bleiben.

1106. Es ist der Ort der Mittelpunkte der Kreise S' der Aufgabe 1105 zu ermitteln, wenn A und B fest bleiben und sich P, P' so auf S' bewegen, dass PP' konstant bleibt.

1107. In der Ebene ist gegeben eine gerade Linie LL' , ein Punkt F und ein Punkt A ; man betrachte alle Kegelschnitte, für welche F ein Brennpunkt ist und welche LL' zur Direktrix haben. Durch A zieht man die Tangenten an alle Kegelschnitte. Es soll der Ort der senkrechten Projektion von A auf die Berührungssehnungen bestimmt werden.

1108. Es soll in der letzten Aufgabe der Ort der Berührungspunkte bestimmt werden und wie er sich ändert nach der Lage des Punktes A .

1109. Ein Punkt F hat von einer gegebenen geraden Linie L den Abstand a . Wie heisst die Gleichung der Kegelschnitte, welche F zum Brennpunkt und eine Asymptote parallel L haben?

1110. Zieht man in der Aufgabe 1109 von jedem Mittelpunkt der Hyperbeln ein Perpendikel auf L , welches die zu F gehörende Direktrix in einem Punkte M trifft, welchen Ort beschreibt der Punkt M ?

1111. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1109 die rechtwinklige Projektion des Brennpunktes F auf die andere Asymptote?

1112. Von zwei Punkten M, N eines Kreises, umschrieben einem Dreieck ABC , zieht man gerade Linien, welche mit den Seiten gleiche Winkel α bilden. Die zwei geraden Linien, welche verbinden die Scheitel der drei Winkel, von denen je ein Schenkel durch M geht, und die Scheitel der drei Winkel,

von denen je ein Schenkel durch N geht, schneiden sich in einem Punkte P unter konstantem Winkel.

1113. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1112 P , wenn α veränderlich ist?

1114. A und B sind die Endpunkte eines Kreisdurchmessers; C sei ein beliebiger Punkt des Kreises; auf AC trage man von C aus nach beiden Seiten gleiche Längen $CD = CD'$ so ab, dass $CB : CD = n$ ist. Welchen Ort beschreiben die Punkte D, D' , wenn C den Kreis beschreibt?

1115. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1114 der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABD und des Dreiecks ABD' ?

1116. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1114 der Mittelpunkt des dem Dreieck BDD' eingeschriebenen Kreises?

1117. Welchen Ort beschreibt in der Aufgabe 1114 der Mittelpunkt des Kreises, welcher das Dreieck BDD' von aussen berührt?

1118. Es ist ein Kreis O , auf welchem ein Punkt A liegt, und eine gerade Linie D gegeben; auf der geraden Linie D einen Punkt so zu finden, dass, wenn man von ihm zwei Tangenten an den Kreis legt, die Verbindungslinien des Punktes A nach jenen Berührungspunkten einen gegebenen Winkel einschliessen.

1119. Man kann drei eine Parabel oskulierende Kreise konstruieren, welche eine Tangente dieser Parabel berühren; es soll gezeigt werden, dass diese Tangente und die Tangenten in den Oskulationspunkten ein und denselben Kreis berühren.

1120. Es sind zwei einen rechten Winkel bildende Tangenten an einen Kreis gegeben. Es soll der Ort des Brennpunktes der Parabeln bestimmt werden, welche die beiden geraden Linien und den Kreis berühren.

1121. Seien M, M', N, N', P, P' die Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks ABC , welchen Ort hüllen die geraden Linien $AM, AM', BN, BN', CP, CP'$ ein?

1122. Eine Hyperbel hat die Axen einer Ellipse zu Tangenten und die Ellipse hat die Asymptoten der Hyperbel

zu Tangenten; es soll das Centrum der Hyperbel bestimmt werden.

1123. Es sind gegeben zwei Parabeln ($y^2 = 2a[x + a]$); eine Tangente der einen Parabel schneidet die andere Parabel in den Punkten M, N ; über MN als Durchmesser beschreibt man einen Kreis, welcher die Parabel ohne Tangenten in P, Q schneidet; es ist zu zeigen, dass PQ Tangente an die erste Parabel ist.

1124. Es ist gegeben ein Dreieck und ein diesem Dreieck umschriebener Kreis. Man beschreibt einen Kegelschnitt, welcher den Kreis in M und das Dreieck berührt. Sei m der Krümmungsmittelpunkt dieses Kegelschnittes im Punkte M , welchen Ort beschreibt m , wenn M den Kreis beschreibt?

1125. Ein Dreieck ABC ist gegeben, man zieht von einem Punkte P gerade Linien parallel den Seiten BC, CA, AB , welche resp. AB, BC, CA in A', B', C' treffen. Liegen A', B', C' in einer geraden Linie, so liegt P auf einem ganz bestimmten Kegelschnitt.

1126. Einem Punkte P des in der Aufgabe 1125 bestimmten Kegelschnittes entsprechen zwei gerade Linien mit Punkten $A' B' C'$; welchen Ort beschreibt der Schnittpunkt dieser beiden geraden Linien, wenn P den Kegelschnitt durchläuft?

1127. Ein gegebenes Dreieck ABC schneide man durch eine Transversale, welche auf den Seiten oder deren Verlängerungen sechs Segmente so bestimmt, dass die Produkte von drei nicht aufeinanderfolgenden Abschnitten konstant sind. Welchen Ort bestimmt die Transversale?

1128. Es ist gegeben ein Kreis mit den Durchmessern AB und D , ein Punkt O . Es soll ein Punkt M derart bestimmt werden, dass die geraden Linien MA, MB auf D ein Stück PQ bestimmen, dass der Winkel POQ ein rechter ist.

1129. Es ist zu beweisen, dass alle einem festen Dreieck umschriebenen Kegelschnitte, die ein festes Segment harmonisch teilen, durch einen Punkt gehen.

1130. Zu einer festen geraden Linie bestimme man in Bezug auf ein System von konfokalen Kegelschnitten die Pole, welche auf einer geraden Linie liegen (s. Aufg. 785). Beweise, dass diese gerade Linie Normale an einem der Kegelschnitte ist.

1131. In einer aus den Halbaxen $CA = a$ und $CB = b$ konstruierten Ellipse sei P der Punkt, welcher zu der beliebig gewählten excentrischen Anomalie $ACM = \varphi$ gehört, mithin $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$; in einer zweiten, aus gleichgerichteten, sonst aber willkürlichen Axen CA_1 und CB_1 konstruierten Ellipse bedeute P_1 den zu derselben Anomalie φ gehörigen Punkt. Es soll bewiesen werden: Die Verbindungslinie der entsprechenden Punkte P und P_1 ist normal einer dritten Ellipse $A_2P_2B_2$ und schneidet letztere in einem Punkte P_2 , welcher zu derselben Anomalie gehört.

1132. Wie modifiziert sich der Satz 1131, wenn an die Stelle der Ellipse eine Hyperbel, also $x = a \sec \varphi$, $y = b \tan \varphi$ tritt?

1133. Man soll die Polarreziproke eines Kreises in Bezug auf einen andern Kreis bestimmen, d. h. den Ort des Poles p einer Tangente PT des Kreises C in Bezug auf den Kreis O ermitteln. Bestimme, wenn die reziproke Polare eine Ellipse, Hyperbel, Parabel ist.

1134. Löse mit Hilfe des Paskalschen Satzes, den Eigenschaften der Polaren die Aufgabe: Einem Kegelschnitt ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch drei gegebene Punkte gehen (s. Aufg. 351).

1135. Einem gegebenen Kegelschnitt ein Dreieck XYZ zu umschreiben, dessen Ecken in drei ein gegebenes Dreieck ABC bildenden geraden Linien liegen (s. Aufg. 1134 und 352).

1136. Drei Kreise zu bestimmen, welche einander berühren und deren jeder zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks zu Tangenten hat.

1137. Wie heisst die Aufgabe 1136, wenn an die Stelle der Kreise resp. Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln treten?

1138. Sei M ein Punkt eines Centralkegelschnittes, dessen Mittelpunkt O_1 und dessen grosse Axe Ox ist; die Tangente in M schneide Ox in A ; die Senkrechte von M auf Ox schneide Ox in P ; man trage $PA' = PA$ ab; es sei $MPS = 2MP$ und OS schneide MA' in einem Punkte K ; errichtet man in K auf MA' eine Senkrechte, so schneidet diese die Normale im Krümmungsmittelpunkt.

1139. Ist die Kurve in Aufg. 1138 eine Parabel, so modifiziert die Konstruktion sich, indem man durch S eine Parallele zu Ox zieht, welche MA' in einem Punkte K schneidet und dann wie in Aufg. 1138 verfährt.

1140. Wie folgt aus Aufg. 1138 der Satz: Der Krümmungsradius in einem Punkte eines Centralkegelschnittes ist die vierte Proportionale aus den Segmenten auf der Tangente vom Berührungspunkt bis zum Schnittpunkt mit den Axen und der Entfernung des Mittelpunktes von der Tangente.

1141. Die Sehne, welche ein Krümmungskreis der Parabel und eine Parabel gemein haben, ist das vierfache der Länge der Tangente zwischen dem Berührungspunkte mit dem Kreise und der Parabel und dem Schnittpunkte mit der Axe der Parabel.

1142. Man bestimme den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Verhältnis der Entfernung von einem gegebenen Kreise zu der Entfernung von einer festen geraden Linie konstant ist. Man beweise, dass der Mittelpunkt des Kreises ein Brennpunkt des Kegelschnittes ist und dass die feste gerade Linie gemeinschaftliche Sehne des Kreises und des Kegelschnittes ist und auf der Verbindungslinie der Brennpunkt senkrecht steht.

1143. Der Durchmesser der oskulierenden Parabel in M , konjugiert der Tangente MT , ist die Tangente in M an den geometrischen Ort der Mittelpunkte der MT parallelen Sehnen. Dieser Satz gilt allgemein für Kurven; wie heisst er, wenn die Kurve ein Kegelschnitt ist?

1144. Wenn man von einem Punkte die Normalen an eine Ellipse zieht und wenn man die vier Durchmesser, welche auf diesen Normalen senkrecht stehen, konstruiert, so bestimme die Schnittpunkte der in den vier Enden der gezogenen Halbdurchmesser an die Ellipse gelegten Normalen.

1145. Wenn man von einem Punkte die Normalen an die konfokalen Centralkegelschnitte zieht, an die Fusspunkte der Normalen die Tangenten legt, dann liegen die Mittelpunkte der von den Axen begrenzten Tangentenabschnitte auf einer festen geraden Linie; diese gerade Linie ist die Polare des

gemeinsamen Punktes der Normalen in Bezug auf die mit den Kegelschnitten konfokale gleichseitige Hyperbel.

1146. Wenn ein Dreieck BCD sich ändert derart, dass es eingeschrieben und umgeschrieben zweien Ellipsen E_1 und E_2 mit der Lage nach gleichen Axen bleibt, so gehen die Normalen der Ellipse E_1 in den Punkten B, C, D durch einen Punkt P ; der Ort dieser Punkte P ist eine Ellipse.

1147. Wenn ein Dreieck sich so ändert, dass es ein- und umgeschrieben zweien Ellipsen mit der Lage nach gleichen Axen bleibt, so schneiden die Normalen in den Scheiteln sich in einem Punkte P , welcher eine Ellipse beschreibt; der Schnittpunkt der Höhen, der Mittelpunkt des dem Dreieck umschriebenen Kreises beschreiben Ellipsen, und die geraden Linien, welche P mit diesen Punkten verbinden, sind Normalen an dieselben festen Ellipsen.

1148. Wenn man einen Kreis über einen Radius OA' der Ellipse als Durchmesser beschreibt, so schneidet er die Ellipse in drei Punkten B, C, D ; die Normalen dieser Punkte gehen durch einen Punkt, und die drei Normalen in den Punkten B', C', D' als Endpunkte der zu OB, OC, OD konjugierten Halbdurchmesser schneiden sich auf der Ellipse.

1149. Wenn man durch einen Punkt O der Brennpunktssehne eines Centralkegelschnittes (mit dem Mittelpunkt C) an die Kurve die zwei Normalen OG und OH und ein Perpendikel OK auf einen Durchmesser PQ zieht, so ist der geometrische Ort des Schnittpunktes R dieses Perpendikels und des zu PQ konjugierten Durchmessers die gerade Linie GH , welche durch die Fusspunkte der beiden Normalen geht.

1150. Es ist gegeben ein Kegelschnitt und ein Punkt in der Ebene, von welchem man Senkrechte auf die Seiten eines dem Kegelschnitt umschriebenen Dreiecks fällt; die Fusspunkte dieser Senkrechten auf den Dreiecksseiten bestimmen einen Kreis K , und jedem dem Kegelschnitt umschriebenen Dreieck entspricht ein Kreis K . Bestimme die Radikalmittelpunkte der Kreise K . Welchen Ort beschreiben die Mittelpunkte der Kreise K ?

1151. Wie lautet Aufg. 1150, wenn man statt des „umschriebenen Dreiecks“ „ein in Bezug auf den Kegelschnitt sich

selbst konjugiertes Dreieck“ nimmt? Es ist in diesem Falle noch zu beweisen, dass die Verbindungslinie der Fusspunkte der vom gegebenen Punkte auf zwei konjugierten Durchmessern gefällten Perpendikel durch das Radikalcentrum geht.

1152. Zwei Scheitel A, B eines Dreiecks ABC sind fest; der dritte Scheitel C bewegt sich in der Ebene derart, dass der Fusspunkt der den Winkel A halbierenden geraden Linie auf BC eine gegebene gerade Linie beschreibt. Welchen Ort bestimmt C ? Es ist zu bestimmen, wenn dieser Ort eine Ellipse, Parabel, Hyperbel ist.

1153. Es ist ein Dreieck und ein Punkt gegeben; es ist bekannt, dass man durch den Punkt zwei Parabeln legen kann, welche dem Dreieck umschrieben sind. Man soll den Ort der Punkte bestimmen, für welche die Axen der Parabeln einen gegebenen Winkel einschliessen.

1154. Durch einen Punkt A , ausserhalb einer Parabel, zieht man zwei Tangenten an die Parabel und in den Berührungspunkten die Normalen, welche sich in B schneiden; welchen Ort beschreibt der Punkt A , wenn der Punkt B : 1. auf einer gegebenen geraden Linie, 2. auf einem Kreise, der den Scheitel der Parabel zum Mittelpunkt hat, sich bewegt.

1155. Es ist der Ort der Berührungspunkte der von einem Punkte an die gleichseitigen Hyperbeln, welche einem gegebenen Dreieck einbeschrieben sind, gezogenen Tangenten zu bestimmen.

1156. Durch die drei Ecken eines rechtwinkligen Dreiecks legt man alle Parabeln; man zieht an diese Parabeln Tangenten parallel der Hypotenuse des gegebenen Dreiecks; auf welcher Kurve liegen die Berührungspunkte dieser Tangenten?

1157. Der in Aufg. 1156 gefundene Ort schneidet jede der Parabeln in vier Punkten; die den beiden Kurven gemeinschaftlichen Sehnen, welche nicht durch den Scheitel des rechten Winkels des Dreiecks gehen, bilden ein Dreieck D ; welchen Ort beschreibt der Durchschnittspunkt der Mittellinien — der Schwerpunkt — des Dreiecks D ?

1158. Eine gegebene Ellipse bewegt sich im Innern einer gegebenen Parabel derart, dass sie die Parabel in zwei Punkten berührt. Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt der Ellipse und die gemeinschaftliche Berührungssehne?

1159. Wie gestaltet sich Aufg. 1158, wenn die Parabel gegeben ist durch den Scheitel, eine Tangente und einen Punkt?

1160. Wenn man von einem Punkte M auf einer Hyperbel eine Tangente MT an den die Hyperbel längs ihrer Transversalaxe doppelt berührenden Kreis zieht, und man von M eine Parallele der Asymptote bis zu ihrem Schnitt Q mit der Transversalaxe der Hyperbel legt, so ist das Dreieck MPQ gleichschenkelig — MP Ordinate von M . Konstruiere die Hyperbel, wenn die Transversalaxe und ein Punkt gegeben ist.

1161. Wenn zwei Dreiecke in Bezug auf einen Kegelschnitt konjugiert sind, so liegen die sechs Ecken auf einem Kegelschnitt; die sechs Seiten sind Tangenten an einen Kegelschnitt; die sechs Ecken, welche einem Kegelschnitt angehören, bilden zwei Systeme von drei Punkten, konjugiert in Bezug auf einen Kegelschnitt; die sechs Seiten als Tangenten eines Kegelschnittes bilden zwei Systeme von drei geraden Linien, konjugiert in Bezug auf ~~denselben~~ ^{einen} Kegelschnitt. Sind die zwei Dreiecke dem Kegelschnitt einbeschrieben, so sind die sechs Seiten Tangenten an einen Kegelschnitt. Sind die zwei Dreiecke dem Kegelschnitt umschrieben, so liegen ihre Ecken auf einem Kegelschnitt.

1162. Es ist eine Ellipse und Hyperbel mit denselben Brennpunkten gegeben; ein Kegelschnitt K berührt jeden der Kegelschnitte doppelt; es soll der Ort der Schnittpunkte der Tangenten an die Ellipse und Hyperbel im Punkte, wo K diese Kurven berührt, bestimmt werden.

1163. Es sind zwei Kreise gegeben; man soll eine Parabel bestimmen, welche jeden der Kreise doppelt berührt, und man soll den Parameter durch die Radien und die Entfernung der Mittelpunkte finden.

1164. Seien M, A, B drei Punkte eines Kreises; es soll der Ort der Brennpunkte der Parabeln bestimmt werden, welche MA, MB in A und B berühren, während M den Kreis durchläuft.

1165. Es ist ein Kreis und ein Punkt A gegeben; es soll der Ort des Mittelpunktes der gleichseitigen Hyperbeln, welche durch A gehen und den Kreis in zwei Punkten berühren, bestimmt werden.

1166. Den Ort eines Punktes M derart zu bestimmen, dass ein Dreieck, gebildet aus den Tangenten von diesem Punkte an einen gegebenen Kegelschnitt und der Berührungsehne einen konstanten Inhalt hat.

1167. Es seien a und b die beiden Halbaxen einer Ellipse; $a + b$ und $a - b$ die Radien von zwei mit der Ellipse konzentrischen Kreisen. Zieht man von irgend einem Punkte eines dieser Kreise zwei Tangenten an die Ellipse, so schneiden sich die Normalen in den entsprechenden Berührungspunkten auf dem anderen Kreise.

1168. Den Ort der Brennpunkte der Kegelschnitte zu bestimmen, welche eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte berühren und welche einen gegebenen Punkt als Endpunkt der Brennpunktaxe haben.

1169. Man nehme zwei feste Tangenten AC , BC in den Punkten A , B eines gegebenen Kegelschnittes. Durch A und B ziehe man je eine beliebige Sekante, welche den Kegelschnitt in M resp. in N schneidet. Die geraden Linien AM , AN schneiden die Tangente BC in m und n ; die geraden Linien BM , BN schneiden die Tangente AC in m' und n' . Es soll bewiesen werden: 1. dass das anharmonische Verhältnis der vier Punkte A , C , m' , n' gleich dem der vier Punkte C , B , m , n ist, 2. dass die vier geraden Linien AB , MN , mn' , $m'n$ durch einen und denselben Punkt gehen.

1170. Es sind zwei feste Kreise A und B und der Radius eines dritten Kreises C , welcher A von aussen berührt, gegeben. Welchen Ort bestimmt die Radikalaxe der Kreise B und C ?

1171. Den Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte zu bestimmen, welche ihre Scheitel auf vier gegebenen geraden Linien haben.

1172. Man soll einen Kegelschnitt aus fünf geraden Linien bestimmen, wenn auf vier unter ihnen die Scheitel und auf der fünften geraden Linie der Mittelpunkt liegt.

1173. Wenn drei Kegelschnitte zu je zwei einen Brennpunkt gemein haben, so schneiden sich ihre gemeinsamen Sehnen zu drei in einem Punkte.

1174. Welchen Ort bestimmt die einer Ellipse und ihrem Oskulationskreis gemeinsamen Sehne? Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt dieser Sehnen?

1175. Es sind zwei Kegelschnitte, von denen der eine fest und der andere sich um den gemeinsamen Brennpunkt bewegt, gegeben. Es ist zu beweisen, dass der Ort der Schnittpunkte der gemeinsamen Tangenten ein Kreis ist. Wenn für eine gewisse Lage des beweglichen Kegelschnittes die gemeinschaftlichen Tangenten parallel sind, so sind sie für jede Lage des beweglichen Kegelschnittes parallel.

1176. Bezeichnen A, B, C die Ecken eines Dreiecks und A', B', C' die Schnittpunkte dieser Polaren der Ecken in Bezug auf einen Kegelschnitt mit den Gegenseiten; die über AA', BB', CC' als Durchmesser beschriebenen Kreise schneiden sich in demselben Punkte.

1177. Durch die Ecken eines Dreiecks zu je zwei genommen lege man drei Parabeln, welche sich in einem Punkte berühren. Die Durchmesser dieser Parabeln, welche durch den Berührungspunkt gehen, schneiden die entsprechenden Seiten des Dreiecks in solchen Punkten, dass die geraden Linien, welche diese Punkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, sich in einem Punkte schneiden.

1178. Ein Winkel von konstanter Grösse bewegt sich in der Ebene derart, dass der Scheitel einen gegebenen Kreis durchläuft und der eine Schenkel durch einen festen Punkt geht; welchen Ort bestimmt der andere Schenkel?

1179. Drei Kreise gehen durch einen Punkt; zu je zwei zieht man die Schnittpunktssehnen bis zu ihren Schnittpunkten mit dem dritten Kreise; verbindet man die letzteren Punkte mit den Schnittpunkten der Kreise, so entsteht ein Sechseck, von welchem bewiesen werden soll, dass das Produkt der geraden Seiten, dividiert durch das Produkt der ungeraden Seiten, konstant ist.

1180. Es ist eine Parabel und in dem Innern derselben ein Punkt gegeben; durch diesen Punkt lege man einen die Parabel doppelt berührenden Kreis. Welche Gleichung hat der Kreis und wie lässt er sich konstruieren?

1181. Die zwei Kreise, welche durch die Brennpunkte eines Kegelschnittes gehen und eine Tangente an dem Kegelschnitte berühren, schneiden sich immer unter demselben Winkel.

1182. Es ist ein Kegelschnitt mit dem Brennpunkte F gegeben; N ist der Fusspunkt des von F auf die zugehörige Direktrix gefällten Perpendikels; ferner sind FM, FM' Senkrechte von F auf zwei Tangenten an den Kegelschnitt; FN' ist ein Perpendikel von F auf die Berührungssehne; es soll bewiesen werden, dass die vier Punkte M, M', N, N' auf demselben Kreise liegen und die Tangenten in M' und N' an den Kreis schneiden sich auf der geraden Linie MM' .

1183. Der Inhalt eines Dreiecks, gebildet aus drei Tangenten an eine Parabel, ist gleich dem halben Inhalte des durch die drei Berührungspunkte bestimmten Dreiecks.

1184. Der Inhalt eines Dreiecks, bestimmt durch die Berührungspunkte von drei Tangenten an eine Parabel, welche parallel den Seiten eines der Parabel eingeschriebenen Dreiecks sind, ist gleich dem achten Teile des Inhalts jenes eingeschriebenen Dreiecks.

1185. Wenn man durch die Ecken eines der Parabel eingeschriebenen Dreiecks parallele gerade Linien zu den Gegenseiten zieht, so schneiden diese Parallelen die Parabel in drei Punkten, welche ein Dreieck bilden, dessen Inhalt achtmal so gross ist, als der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks; die Pole der parallel gezogenen geraden Linien in Bezug auf die Parabel bilden ein Dreieck, dessen Inhalt so gross ist, als der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks.

1186. Wenn zwei Dreiecke einer Parabel eingeschrieben sind und wenn man durch die Ecken eines jeden Parallele zu den entsprechenden Seiten des andern zieht, so erhält man auf der Parabel zwei inhaltsgleiche Dreiecke, welche den achtfachen Inhalt des Dreiecks haben, deren Ecken die Berührungspunkte der Tangenten sind, welche den Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der gegebenen Dreiecke parallel laufen.

1187. In einer Parabel ist ein Dreieck eingeschrieben; von einem Punkte der Parabel ziehe man Parallele zu den

Dreiecksseiten und durch die Ecken des Dreiecks zieht man Parallele zu der Parabeltangente in jenem Punkte; auf diese Art erhält man durch die Schnittpunkte der geraden Linien mit der Parabel zwei inhaltsgleiche Dreiecke, deren Inhalt achtmal so gross ist als der Inhalt des Dreiecks, welches gebildet ist aus den Berührungspunkten der Tangenten an die Parabel, welche den geraden Linien parallel sind, die den gegebenen Punkt mit den Ecken des gegebenen Dreiecks verbinden.

1188. Bestimme den Inhalt eines Vierecks, welches gegeben ist durch die Berührungspunkte der Tangenten an die Parabel, welche den Seiten eines eingeschriebenen Vierecks parallel sind. Wie gross ist der Inhalt des aus diesen Tangenten bestimmten Vierecks?

1189. Wie heisst Aufg. 1188, wenn man statt „Viereck“ „Polygon“ setzt?

1190. Einer Parabel ist ein Dreieck ABC eingeschrieben; die Punkte A', B', C' halbieren die Seiten BC, CA, AB ; die geraden Linien $A'B', B'C', C'A'$ schneiden die Parabel in den Punkten $A'', B_1''; B'', C_1''; C'', A_1''$. Bestimme den Inhalt aller durch die Punkte $A'', B'', C''; A_1'', B_1'', C_1''$ festgelegten Dreiecke.

1191. Bestimmt man in Aufgabe 1190 zu den Seiten AB, BC, CD die Pole P, Q, R in Bezug auf die Parabel, so ist der Inhalt vom Dreieck PQR zu bestimmen.

1192. Wenn man auf einer Hyperbel drei Punkte derart annimmt, dass der Schwerpunkt des die drei Punkte zu Ecken habenden Dreiecks auf einer der Asymptoten liegt, so ist der Inhalt des Dreiecks der durch die drei Punkte gezogenen Tangenten viermal so gross, als der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks.

1193. Liegt in der letzten Aufgabe der Schwerpunkt auf der Hyperbel, so ist das betreffende Tangentendreieck an Inhalt gleich der Hälfte des eingeschriebenen Dreiecks.

1194. Liegt in Aufg. 1192 der Schwerpunkt auf der Hyperbel und zieht man durch die Ecken des eingeschriebenen Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten, so treffen diese Parallelen die Hyperbel in drei Punkten, welche ein Dreieck

bestimmen, dessen Inhalt acht Mal so gross als der Inhalt des eingeschriebenen Dreiecks ist.

1195. Zieht man in Aufg. 1192 durch die Ecken des eingeschriebenen Dreiecks Parallele zu den Gegenseiten, so treffen diese die Hyperbel in drei Punkten, welche ein dem eingeschriebenen Dreieck inhaltsgleiches Dreieck bestimmen.

1196. Welchen Inhalt hat das Viereck, gebildet aus den Tangentenberührungspunkten auf einem Aste der Hyperbel, wenn die Tangenten den Seiten eines in denselben Hyperbelast eingeschriebenen Vierecks parallel laufen?

1197. Man bestimme den geometrischen Ort der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, welche eine gegebene Parabel derart doppelt berühren, dass die Berührungssehne auf der Parabelaxe vom Scheitel aus eine Länge abschneidet, welche die mittlere Proportionale ist zwischen den Abschnitten, welche die Axe auf jener Sehne bestimmt.

1198. Eine Reihe Ellipsen haben einen gemeinschaftlichen Scheitel und in ihm eine gemeinschaftliche Tangente. Von einem Punkte P zieht man an alle Ellipsen die Normalen; welchen Ort bestimmen die Fusspunkte dieser Normalen, wenn die Ellipsen so bestimmt sind, dass für jede von ihnen das Verhältniss der zur gemeinsamen Tangente senkrechten Axe zur zweiten Axe gleich $\sqrt{3}$ sei. Wie heisst die Gleichung des Ortes, wenn P auf der geraden Linie liegt, welche den Winkel am Scheitel zwischen der gemeinsamen Tangente und der Normalen halbiert?

1199. M sei ein Punkt einer Ellipse mit bekanntem Krümmungsradius MO ; welchen Ort beschreibt der Brennpunkt der Ellipse?

1200. Es ist ein Kreis O , ein Durchmesser AB und eine Sehne CD parallel einer gegebenen Richtung gegeben; man bestimme die Gleichung der gleichseitigen Hyperbeln, welche durch A, B, C, D gehen; man suche den Ort der Berührungspunkte der Tangenten an diese Hyperbeln, welche auf der Richtung CD senkrecht stehen.

1201. Der Ort in Aufg. 1200 ist ein Kegelschnitt; welchen Ort beschreibt der Scheitel dieses Kegelschnittes, wenn die Richtung CD sich ändert?

1202. Eine Reihe von Ellipsen haben den Endpunkt der kleinen Axe gemeinsam und berühren sich so in dem Punkte, dass sie einen gemeinsamen Oskulationskreis in ihm haben; welchen Ort bestimmen die Brennpunkte dieser Ellipsen?

1203. Es seien A, B zwei parallele gerade Linien und c ein Punkt nicht in dem Raume zwischen A und B gelegen; eine Gerade durch c trifft A, B in a und b ; über ab als Durchmesser beschreibe man einen Kreis; es soll bewiesen werden, dass die Enveloppe dieses Kreises eine Hyperbel ist, wenn ab sich um c dreht.

1204. Es ist ein Kreis und ein fester Punkt gegeben; von verschiedenen Punkten des Kreises als Mittelpunkte genommen beschreibe man Kreise, welche durch den festen Punkt gehen; welchen Ort bestimmen die Durchschnittssehnen des gegebenen Kreises und der so konstruierten Kreise? Welchen Ort bestimmt die Polare eines beliebigen Punktes in Bezug auf die durch den festen Punkt gehenden Kreise, wenn der feste Punkt auf dem gegebenen Kreise liegt?

1205. Zu finden den geometrischen Ort der Brennpunkte der eine gleichseitige Hyperbel doppelt berührenden Parabeln und zwar so, dass die Axen der Parabeln dieselbe Richtung beibehalten. Bestimme den Ort der Parabelscheitel.

1206. Durch verschiedene Punkte P einer Ellipse zieht man die Normalen und trägt auf jeder Strecken PM, PM' gleich dem Halbdurchmesser ab, welcher dem durch den Punkt P gehenden Durchmesser konjugiert ist. Es ist zu beweisen, dass die Punkte M, M' auf zwei mit der Ellipse konzentrischen Kreisen liegen und dass deren Radien resp. gleich der Summe oder Differenz der Halbaxen ist.

1207. Bestimme die Enveloppe der Polare eines Punktes in Bezug auf die in ein Viereck eingeschriebenen Kegelschnitte.



Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1885.

- Bardey, Dr. C.**, methodisch geordnete Aufgabenammlung, mehr als 8000 Aufgaben enthaltend, über alle Teile der Elementararithmetik, für Gymnasien, vorzugsweise Realgymnasien u. Oberrealschulen. Zwölfte Auflage. [XIII u. 330 S.] gr. 8. geh. *M.* 2.70.
- Fiedler, Dr. Wilhelm**, die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. Dritte erweiterte Auflage. II. Theil. A. u. d. Titel: Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen. Für Vorlesungen und zum Selbststudium. [Mit zahlreichen Figuren im Text und 16 lithographierten Tafeln.] [XXXIII u. 560 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 14.—
- Harnack, Axel**, Naturforschung und Naturphilosophie. Vortrag gehalten in der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Dresden. [27 S.] gr. 8. geh. *M.* —.60.
- Hecht, Dr. Wilhelm**, Dozent der Mathematik an der Kgl. Forstlehranstalt zu Aschaffenburg, zur Integration der Differentialgleichung $Mdx + Ndy = 0$. [40 S.] gr. 4. geh. n. *M.* 1.—
- Herz, Dr. Norbert**, Assistent für Astronomie und höhere Geodäsie an der k. k. technischen Hochschule in Wien, siebenstellige Logarithmen der trigonometrischen Funktionen für jede Zeitsecunde. Zum astronomischen Gebrauche herausgegeben. [IV u. 182 S.] Lex. 8. geh. n. *M.* 4.—
- Neumann, Dr. F.**, Professor der Physik und Mineralogie, Vorlesungen über theoretische Optik, gehalten an der Universität zu Königsberg. Herausgegeben von Dr. E. DORN, Professor an der technischen Hochschule zu Darmstadt. Mit Figuren im Text. (Mit einem Bildnis Neumanns in Lichtdruck.) [VIII u. 310 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 9.60.
- Reidt, Dr. Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realprogymnasium in Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. Zweiter Teil: Stereometrie. Dritte Auflage. [VIII u. 190 S.] gr. 8. geh. *M.* 3.—

Serret, J.-A., membre de l'Institut et du Bureau des longitudes, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von **AXEL HARNACK**, Dr., und Professor am Polytechnikum zu Dresden. Zweiter Band: Erste Hälfte. Integralrechnung. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VIII u. 380 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.20.

Zweiter Band: zweite Hälfte. (Schluß.) Differentialgleichungen. Mit in den Text gedruckten Figuren. [VI u. 388 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 7.20.

Der erste Band: Differentialrechnung erschien 1884 und kostet *M.* 10.—

Stolz, Dr. Otto, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Vorlesungen über allgemeine Arithmetik. Nach den neueren Ansichten bearbeitet. Erster Theil: Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen. [VI u. 344 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 8.—

Thieme, Dr. H., ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen u. Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluß an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. KRETSCHMER bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. kart. n. *M.* 1.20.

Weyrauch, Dr. Jacob, J., Professor an der polytechnischen Schule zu Stuttgart, Aufgaben zur Theorie elastischer Körper. Mit 110 Figuren im Text. [X u. 350 S.] gr. 8. geh. n. *M.* 8.—

das Princip von der Erhaltung der Energie seit Robert Mayer. Zur Orientirung. [48 S.] gr. 8. geh. *M.* 1.—



Graefe, Friedrich

Aufgaben und Lehrsätze aus der analytischen Geometrie des Punktes, der
geraden Linie, des Kreises und der Kegelschnitte für Studierende an
Universitäten und Technischen Hochschulen

Leipzig 1885

Math.p. 180 t-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11650932-6